Routledge
Taylor & Francis Group

Philosophical Theories of Probability

概率的哲学理论

(英)吉利斯(Gillies, D.) 著
张健丰 陈晓平 译

中山大学出版社

概率的哲学理论

Gailü De Zhexue Lilun

此书对关于概率的哲学探讨给予了很有条理的表述，对该领域作出了宝贵的贡献。

——科林·豪森（Colin Howson）（伦敦政治经济学院）

这本书所涉及的正是在任何其他单独的文本中都没能得到恰当论述的内容，而且它论述得十分清晰，可见作者为此付出了极大的努力。该书区分了概率在社会科学（特别是经济学）领域与自然科学领域的不同解释，并对支持这种区分的理据作出了尤为难能可贵的探讨。

——詹姆斯·洛格（James Logue）（牛津大学）



上架建议：哲学理论

ISBN 978-7-306-03776-3



定价：38.00元

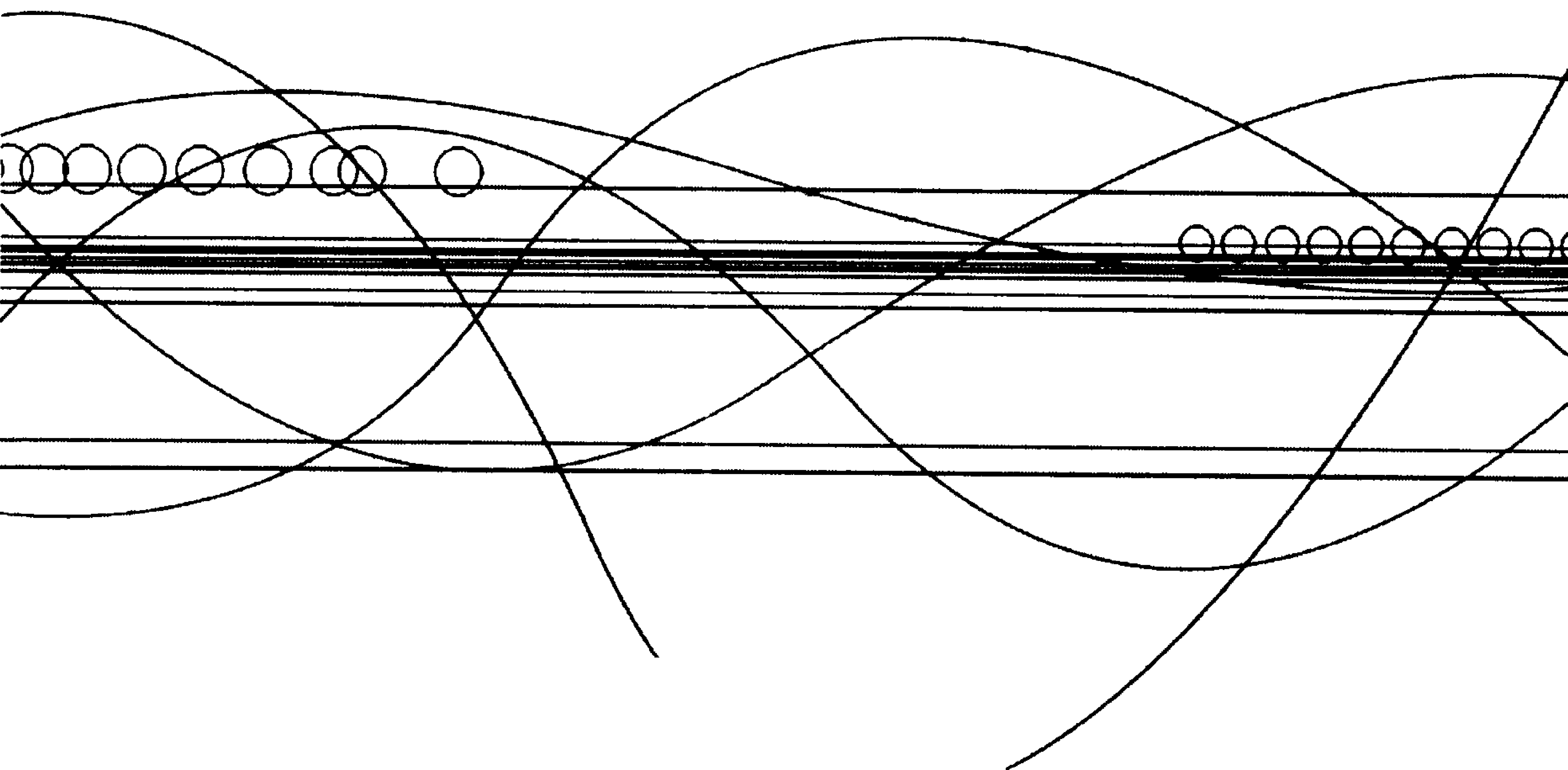


Philosophical Theories of Probability

概率的哲学理论

(英)吉利斯(Gillies, D.) 著

张健丰 陈晓平 译



中山大学出版社

·广州·

Philosophical Theories of Probability 1st Edition / by Donald Gillies / ISBN 0 – 415 – 18276 – X

出版外国图书合同登记号：19 – 2011 – 095 号

图书在版编目（CIP）数据

概率的哲学理论/（英）吉利斯（Gillies，D.）著；张健丰，陈晓平译．—广州：中山大学出版社，2012.4
书名原文：Philosophical Theories of Probability
ISBN 978 – 7 – 306 – 03776 – 3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①吉…②张…③陈…　Ⅲ.①概率论：哲学理论　Ⅳ.①B 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 142077 号

出 版 人：祁　军
策划编辑：周建华
责任编辑：马霄行
封面设计：曾　斌
责任校对：陈　霞
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020 – 84111996，84113349，84111997，84110779
　　　　　发行部 020 – 84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传　真：020 – 84036565
网　　址：http://www.zsup.com.cn　E-mail:zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：佛山市南海印刷厂有限公司
规　　格：787mm × 960mm　1/16　16 印张　305 千字
版次印次：2012 年 4 月第 1 版　2012 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000 册
定　　价：38.00 元

英文版原献词

谨以此书献给我的母亲，她是第一个使我同哲学结缘的人

中文版新献词

献给我的母亲及其华裔朋友梁文华

作者简介

唐纳德·吉利斯（Donald Gillies），1944 年生，现为伦敦大学学院（University College London）科学技术学系（Department of Science and Technology Studies）科学与数学哲学荣誉退休教授（Emeritus Professor of Philosophy of Science and Mathematics），主要研究领域为概率基础、逻辑哲学与数学哲学，从 1990 年起一直致力于研究人工智能与逻辑、科学方法、概率以及因果性等哲学分支之间的互动关系，最近几年开始关注科学哲学如何适用于医学。

内 容 简 介

概率论与统计学在20世纪取得了惊人的发展，并在几乎所有的研究领域得到日益广泛的应用。同时，很多有关概率的新哲学思想也由此得以产生。然而，尽管这些思想有着重要的意义，但它们却往往散见于各种文献，不便于查找。

本书首次对有关概率的各种哲学理论给予了清楚、全面而系统的描述，并对它们相互间的关系提供了说明。本书不仅探讨了关于概率的古典的、逻辑的、主观的、频率的以及倾向的观点，而且说明了各种解释与贝叶斯争论之间的关系，因为贝叶斯争论不管是在统计学中还是在科学哲学中均已变得引人注目。作者在书中也提到了一些新见解：概率的倾向理论的一个很有特色的版本与发展了主观理论的主体间解释。作者还论证支持了一种多元主义的观点，认为有效的概率解释不止一种，每一种适用于不同的语境。

无论你是对关于概率的哲学观点感兴趣，还是打算对那些相关的理论及其关系作更为清晰的了解，本书都将证明它是极有价值的。

科学和哲学的思维对清晰性的需要从未像今天这样显得如此重要：对那些极为清楚明晰的直观概念作最全面的批判性分析不再被视为智者的游戏，而是被看做最为直接地涉及科学的进步的问题之一……在概率的研究领域内，人们对清晰性的这种需要有深切的感受是相当自然的事情，无论是因为从数学的角度和从实验的角度来看这一概念都是十分有意思的，还是因为它似乎对于所有使之精确的尝试都是顽强不屈的。

布鲁诺·德·菲耐蒂（Bruno de Finetti，1937）

前　言

概率论既包含数学方面的内容，也包含哲学方面的内容。关于概率的数学理论在17世纪下半叶首次得到了重大的发展，同时，我们看到，莱布尼茨（G. W. Leibniz）与洛克（J. Locke）等人也在这个时期对与概率哲学有关的问题展开了探讨。在于1690年出版的《人类理解论》（*Essay Concerning Human Understanding*）中，他洛克专辟一章（第四卷第十五章）对或然性（probability）作出阐述。他在前一章中以如下稍带神学色彩的方式说明了他之所以讨论该主题的原因：

> 我们知道，上帝已经把一些事物放置在光天化日之下，也就是说，他给予了我们一些确定的知识，不过，这些知识仅局限于某些事物……因此，就我们日常生活的绝大部分相关事项而言，他为我们提供的只是一种来自我称之为或然性的昏黄的微光，但我想，这种昏黄的微光已适用于他向来乐于使我们置身于其中的平庸状态与摸索状态。
>
> （Locke，1690：Book IV，xiv）

这段话的意义极为重大，因为它表明，洛克认识到了那些指导我们生活的假设大多数都具有不确定性，并指望能把关于或然性的理论用做应对不确定性的手段。

自洛克的时代以来，关于概率的数学理论与统计学都得到了惊人的发展，并被应用于科学的几乎所有分支。而关于概率的哲学思想的发展也始终与它在数学方面的发展齐头并进。现在，关于概率的哲学理论已发展成为一个错综复杂的网络。我写这本书的目的就在于尽可能简单、清楚地详细解释这些理论，并说明各种观点是如何相互关联的。

本书先在第一章提供一些导引性的资料，接着在随后的七章中大致按照历史的发展脉络系统地阐述关于概率的几种主要的哲学解释。这些关于概率的观点分别对概率作出古典的、逻辑的、主观的、频率的、倾向的以及主体间的解释。某些思想家认为，对于概率只有一种正确的解释，而其他都是错误的。然而，这并不是本书所持的观点。本书第八章的论证就是要表明，我所支持的是一种多元主义的概率观念。据此，我认为关于概率的有效解释不止一种，不同的解释适用于

不同的领域；进而，我在第九章中举例说明了这一论题，并论证了概率在自然科学领域和社会科学领域分别具有不同的意义。

因为本书侧重于对概率在哲学方面的研究，所以我设法使所要用到的数学尽可能地简单。然而，要理解概率论就不可避免地要涉及数学。故此，通读本书要以掌握初中程度的代数知识为先决条件，这是不可或缺的最少量的数学知识，而了解一些中学水平的微积分知识当然也是有帮助的。不过，我并不假设读者已经学过概率论，因而在本书展开论述的过程中，我会逐步引入若干基本概念和公理以及一些定理，比如说贝叶斯定理。

尽管具有以上所要求的最低限度的数学知识就几乎能理解全书的内容，但在概率哲学中也存在着某些问题，对它们的表述与讨论需要用到较高级的数学工具。我也探讨了一些这样的问题，不过，对它们的论述仅仅限于标有星号的章节，例如“独立性与可交换性的关系*”。在这些章节中，我假设读者既了解关于概率论的标准测度论的发展，也熟悉现代数理统计学。之所以对这些章节作出如此安排，就是为了好让读者即便略过它们也能够抓住论证的主要思路。

我希望这本书可以引起哲学家尤其是科学哲学家的兴趣。然而，它所讨论的主题却涉及哲学以外的许多领域。在我为本书所选的卷首引语中，布鲁诺·德·菲耐蒂（Bruno de Finetti）就指出，概率哲学不仅仅是“智者（sophist）的游戏”，而且它还“最为直接地涉及科学的进步”。这段写于 1937 年的评述在当时来讲可以说是恰如其分的，而放到今天，也许会显得更加到位。诚然，自 1937 年以来，概率进入了诸如计量经济学、人工智能等相当新的领域，在这些领域中，要想成功地运用概率，就得对什么是恰当的概率解释作出一些考量。其实，贝叶斯主义者与非贝叶斯主义者在统计学领域的论战仍然在激烈地进行着，除非考虑到关于概率的各方面的哲学观点，否则这一争论是不能得到恰当的理解的。此外，概率哲学还处于量子力学的那些谜团的核心部分。事实上，本书的主题不单对于哲学家来说是重要的，即便是对于计算机科学、经济学、物理学及统计学等领域的学者而言，也同样有着重要的意义。可见，概率哲学是一门与实践高度相关的理论学科。

唐纳德·吉利斯
伦敦国王学院哲学系
2000 年 6 月

中文版序

我的《概率的哲学理论》要出中文版了，对此我感到十分的高兴和荣幸，这尤其是因为我从童年初期开始就已经对中国和中华文明感兴趣了。我之所以会产生这样的兴趣，是由于在我年幼的时候，我母亲结识了一位非常要好的朋友梁文华（Man Wah Leung）——一位华裔女士。她嫁给了一个英格兰人——本特利先生（Mr. Bentley）。当时她住在伦敦郊区，离我们家很近。

文华阿姨曾在香港大学学习，后来在日据时期逃离了那座城市。她取道缅甸到了英格兰，在牛津大学完成了她在哲学方面的学业。我母亲也是对哲学感兴趣的，在我孩提时她常常同文华阿姨相聚长谈，聊关于哲学的话题。我对该学科的兴趣正是这样被激发起来的。

文华阿姨很会与小孩相处。她教我和我的一些小伙伴玩麻将，为我们组织牌局。她还给我们做美味可口的中餐（那个时候中国菜在英国是没有什么名气的），教我们使用筷子。除了中国文化的这些宜人的方面以外，她也——尽管是间接地——逐步培养我们接受中国文化的一些更具思想性的方面。尤其是，她总是确信哲学是一门极为重要的学科——这样一种观念很容易就能被辨识出是属于中国传统文化的一部分的。文华阿姨在这一点上的影响无疑是使我决意要成为一名哲学家的一个因素。

在我随后的人生经历中，全球化时代的来临使我有机会在英国和中国与中国的科学哲学家和数学哲学家进行合作，我还曾在1995年到过中国。这种合作是一个积极的发展态势，我希望它在未来能持续下去并变得更加牢固。

概率哲学——即本书所探讨的主题——很好地阐明了哲学、数学与实践是如何可能联系在一起的。关于概率的数学理论从一开始就与关于概率的本性的哲学讨论携手同行，它们二者的发展是齐头并进的。现今跟以往相比情况还是如此，现已成为计算科学很多分支中一个必不可少的工具的“贝叶斯网络”在前几年作为新概念被引入时，也伴随着关于概率的主观观念、贝叶斯主义的基础与归纳推理的本性的哲学讨论。这作为例证说明了传统的中国哲学的另一个主调。相较于欧洲，在中国，哲学在更大的程度上被视为实践的指南而不仅仅是理论思辨。

概率哲学值得被推介的原因不仅在于人们对它本身的兴趣和它的实际用途，而且还在于它是一个适合于进一步研究的领域。在本书中，我尝试给各种迄今已

得到阐发的关于概率的哲学理论提供一个尽可能清晰的说明。然而，该研究对象是处于不断变化之中的。概率的新应用一直都在涌现。近年兴起的一个研究方面是风险分析——特别是金融市场中的风险分析。这些新的应用无疑会对概率提出新的看法，因而新一代的研究者很可能会在这个引人入胜的领域取得重大的进展。

唐纳德·吉利斯
伦敦大学学院科学技术学系
2010年10月

致　谢

我对概率哲学的学习和研究至今已有30余年，在此期间，与该领域众多专家的交往和讨论实在使我获益良多。因此，简述我的研究经历以表明我的思想来源或许是我所能向他们表达诚挚谢意的最佳方式。

我初次接触概率哲学是在剑桥念本科的时候，当时我去听理查德·布雷斯维特（Richard Braithwaite）关于这个主题的那些讲座。虽然那个学年一结束布雷斯维特就随即退休了，但我却因而能在接下来的一年里听到休·梅勒（Hugh Mellor）第一次就该主题所作的系列讲座。这样，尽管当时只是一个本科生，但我有幸受益于关于这一主题的两种不同的观点。

我于1966年在伊姆雷·拉卡托斯（Imre Lakatos）的指导下开始攻读博士学位。那个时候他正致力于撰写一篇关于概率哲学的论文（Lakatos，1968），他当时仍然是卡尔·波普尔（Karl Popper）的哲学理论的热心支持者。由于波普尔在我念博士的前几年提出了一种新的关于概率的倾向理论，所以自然地我就选择它作为我论文的研究主题，而波普尔则为我提供了大量的帮助与支持。

能够得到拉卡托斯与波普尔这两位充满新思想的哲学家的指导，无疑是我极大的荣幸。在他俩的指导下，一开始我极度热衷于概率哲学中的客观主义，但随后与主观学派的交往慢慢地在一定程度上改变了我的观点。我妻子是一位意大利裔的经济学家，她曾经是布鲁诺·德·菲耐蒂的学生。通过她，我认识了德·菲耐蒂，并就概率哲学中的各种不同观点与他进行过很多次极有价值的讨论。再者，我很幸运可以与主观学派中其他最重要的倡导者：菲尔·戴维（Phil Dawid）、弗兰克·拉德（Frank Lad）、丹尼斯·林德利（Dennis Lindley）、马可·蒙达多利（Marco Mondadori）、杰夫·帕里斯（Jeff Paris）、戴维·斯皮格尔霍尔特（David Spiegelhalter）以及彼得·威廉斯（Peter Williams）会面并讨论主观概率的相关问题。除此之外，我在伦敦经济学院（London School of Economics）念研究生时的两位同窗好友［科林·豪森（Colin Howson）和彼得·乌尔巴赫（Peter Urbach）］日后成为主观贝叶斯主义的主要支持者（Howson and Urbach，1989）。我对科林·豪森特别怀有感激之情，因为他多年来付出了大量的时间与我就主观主义和客观主义、贝叶斯主义和非贝叶斯主义等方面的问题进行友好的讨论。由于上述的种种际遇，我个人的立场已从极端的客观主义转变到本书所持的多元主

义的概率观。

另外，与“后凯恩斯”学派的思想交流对我的影响极为重大。这一团体在研究与重构凯恩斯（J. M. Keynes）的思想发展上取得了相当有价值的成果。过去众所周知的一个疑难问题就是凯恩斯早期在概率哲学方面的工作跟概率和不确定性在其日后的经济学研究中的地位之间的关系。而这又牵涉到另一个问题，即拉姆齐（F. P. Ramsey）的批评对凯恩斯的概率观所产生的影响。我曾多次就该问题及其相关问题与布拉德利·贝特曼（Bradley Bateman）、约翰·戴维斯（John Davis）、托尼·劳森（Tony Lawson）、约亨·伦德（Jochen Runde）及罗伯特·斯基德尔斯基（Robert Skidelsky）进行过极富成果的讨论。正是这些互动启发我构想出了在本书第八章中有所讨论的“主体间概率”这一概念；在某种意义上可以说，它其实是凯恩斯与拉姆齐双方观点折中的产物。

除了以上谈到的学界同仁，还有很多朋友和同事曾阅读过本书的部分章节或全书，并且提出了宝贵的意见。在这方面，我尤其要感谢马克斯·艾伯特（Max Albert）、张下涑（Hasok Chang）、戴维·科菲尔德（David Corfield）、洛兰·达斯顿（Lorraine Daston）、吉姆·费策尔（Jim Fetzer）、玛丽娅·卡拉·伽拉沃蒂（Maria Carla Galavotti）、拉迪斯拉夫·克瓦茨（Ladislav Kvasz）、莫什·麦克弗（Moshé Machover）、戴维·米勒（David Miller）以及乔恩·威廉森（Jon Williamson）。

本书的大部分内容曾在伦敦国王学院（King's College London）和伦敦经济学院合办的理科硕士“科学哲学与科学史”课程中以讲座的形式介绍过。其实，认为授课模式应该是老师讲学生听的观念是没有事实根据的，老师给学生讲课实际上是一个双向的互动过程。这么多年来，我就源源不断地获得来听我的讲座的学生在我有待改善与发展的方面所提的建议。我一直都为能有这样一群充满活力与睿智的听众而感到十分幸运。

当然，我还要感谢伦敦国王学院允许我在1996年秋休一个学期的公休假，以及感谢英国社会科学院（British Academy）的津贴，使我得以在1997年年初再休一个学期的公休假。正是由于在此期间摆脱了其他的学术任务，我才有机会写出本书的初稿。

最后值得一提的是，多弗出版公司（Dover Publications）准许本书重印理查德·冯·米泽斯《概率、统计学与真理》（英文修订本第二版）（Richard von Mises, *Probability*, *Statistics and Truth*, 2nd Revised English Edition, 1961）中的内容，约翰·威利父子出版公司（John Wiley & Sons, Inc.）准许本书重印乔治·索罗斯《金融炼金术》（第二版）（George Soros, *The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market*, 2nd Edition, 1994）中的内容，以及亨利·凯伯格准许本书重印他所翻

译的德·菲耐蒂1937年的论文的英译本中的内容，此文载于凯伯格与斯莫克勒合编的《主观概率研究》[Henry E. Kyburg and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, John Wiley & Sons, Inc., 1964, pp. 93 - 158]。在此一并表示衷心的感谢。

目　　录

图 表 目 录

图 片

表 格

第一章　对各种解释的导引性简介——若干历史背景

概率论包含两方面的内容：既有数学方面的，也有基础方面或哲学方面的。这两个方面形成了鲜明的对比。人们在数学方面存在着几乎一致的共识，而在哲学方面却有着相当大的意见分歧。除了后面将会谈到的一些学者以外，所有概率论家在数学理论方面均接受同一组公理，因此他们全部同意都有哪些定理。然而，至少在20世纪，对于这一数学演算，却逐渐形成了四种明显不同的解释，并且每种解释在今天都有各自的拥护者。本书将对这些解释给予详尽的说明，不过，为了让读者对接下来的论述有所了解，我想，首先对各种观点作一个导引性的简介对读者是有帮助的。

第一节　对各种解释的导引性简介

以下是当前四种最主要的解释：

1. **逻辑**理论（the logical theory）将概率等同于合理置信度（degree of rational belief)。该理论假定，对于相同的证据，所有有理性的人都会对某一假说或预测怀有相同的置信度。

2. **主观**理论（the subjective theory）将概率等同于某一个人的置信度（degree of belief)。这一理论不再假定所有有理性的人在面对相同的证据时都会对特定假说或预测持有相同的置信度，而是允许存在不同的意见。

3. **频率**理论（the frequency theory）把某一结果的概率定义为该结果出现在相似事件的长系列（a long series）中的极限频率（the limiting frequency)。

4. **倾向**理论（the propensity theory)，或者说至少它的某种版本，把概率看做可重复条件集（a set of repeatable conditions）所固有的一种倾向（propensity)。说某一特定结果的概率是 p 也就是声称那些可重复的条件具有这样的一种倾向：如果它们大数次地重复出现，它们会使得该结果的频率趋近于 p。

这四种被普遍接受的概率解释在第三、第四、第五、第六及第七章中将会得到详细的说明。第八章则会对我在1991年提出的一种概率解释作进一步的论述（参见 Gillies，1991；Gillies and Ietto-Gillies，1991)。这种主体间的（intersubjective）观点是对主观理论的发展，它并不是把概率视为个人的置信度，而是把它

视为某一社会群体共同的置信度。

有一些提倡某种概率解释的人会认为只有他们所拥护的那种解释才是有效的。比如说德·菲耐蒂（B. de Finetti），作为概率的主观理论的两位创立者之一，他就认为所有概率在性质上都是主观的。与之相反，提出概率的倾向理论的波普尔（K. Popper）却不愿意接受任何形式的主观解释。然而，我们有可能认为，一种概率解释在某一特定的语境中是有效的，而另一种解释则在另一个语境中有效。这种多元主义的概率观将在第八章中得到论述。或许最为人所熟知的这类观点是由拉姆齐（F. P. Ramsey）提出并为卡尔纳普（R. Carnap）所发展的双概念的（two-concept）概率观。事实上，我将论证支持三概念的（three-concept）概率观。

大部分概率哲学家都同意，这些各种各样的概率解释一般可以分为两大组。令人遗憾的是，对于应该如何命名这两组解释，哲学家之间存在着相当大的分歧。在下一章的第三节中，我会讨论那些用于命名的不同的术语，它们全都既有优点又有缺点。因此，在这里我只会直接给出我在全面考虑之后所选择的最佳术语，尽管它们也难免存在不足之处。这样，各种概率解释会被分为两组：认识论的（epistemological）［或认识的（epistemic）］和客观的（objective）。它们有以下这些不同的地方。概率的认识论解释认为，概率是相关于人的知识或信念的。根据这种进路，概率就是测度认识度（degree of knowledge）、合理置信度、置信度以及诸如此类的东西的。很明显，逻辑的、主观的与主体间的解释全都属于认识论的。相比之下，概率的客观解释则把概率看做客观物质世界的一个特性，与人的知识或信念没有任何关系。显然，频率解释和倾向解释皆为客观的。人们最喜欢拿来说明这种进路的例证是铀元素的某种同位素在一年内发生衰变的概率。人们如今可能知道或者可能不知道这个概率，但该概率的存在是完全独立于它是否为人所知的。它是作为物理世界的一个特性而客观存在的。诚然，即便根本没有人类，铀的这些同位素在具体指定的时间内都有其发生衰变的概率。总而言之，认识论解释认为概率涉及人和对人的知识或信念的测度，而客观解释却把概率看做客观物质世界独立于人的特性。

这种区分在很多情况下是有用的，但并非总是绝对的。在第八章中，我在引入“主体间概率”（intersubjective probability）概念的同时，还会引入“人工制品性概率”（artefactual probability）概念。如此一来，这另外的两种概率解释往往会被认为易于使认识论的与客观的二分转变成更为类似于连续统的东西。尽管这样会轻微地削弱认识论的与客观的二分，但在我看来，它对于理解概率哲学仍然有着至关重要的意义，因而在本书中我会经常用到这种区分。我支持多元主义的概率观，并且为了阐明这一立场，我会在最后一章中通过论证来表

明：认识论解释适合于经济学和社会科学，而自然科学所需要的则是概率的客观解释。

本书的主要目的在于讨论那些在20世纪逐渐形成并且如今仍然有人坚持的关于概率的哲学观点。然而，若不提及拉普拉斯（P. S. Laplace）曾有过详细论述的概率的古典解释，我们对各种概率解释的说明就是不完整的。拉普拉斯的名著《概率的哲学短论》[*Philosophical Essay on Probabilities*（*Essai Philosophique sur les Probabilités*）] 在1814年首次出版，对概率的古典解释进行了阐述。虽然今日已无古典理论的拥护者，但拉普拉斯的书在当时产生了巨大的影响，使得古典解释占据主流地位（或者至少可以说得到非常广泛的认同）至少达一百年之久。因此，我们对这个理论的一些思考就构成了随后论述其他理论的必不可少的背景。

尽管拉普拉斯的《概率的哲学短论》（以下简称《短论》）享有盛誉，但它实际上并非一部极具原创性的作品。概率的古典解释大致产生于1650年至1800年间，这时期迎来了关于概率的数学理论的提出与发展。古典理论的大部分观点都能在出版于1713年的雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）的《猜度术》（*Ars Conjectandi*）的第四卷中找到，而且伯努利还通过书信与莱布尼茨（G. W. Leibniz）讨论过这些观点。然而，概率的古典解释的一些观点却是凭借拉普拉斯的《短论》才得以在19世纪介绍给数学家和哲学家的。这可能仅仅在于拉普拉斯的那篇论文是以法文写的，而伯努利的《猜度术》是用拉丁文写的，因为在19世纪，越来越多的科学家和数学家看不懂拉丁文了。

由于拉普拉斯的《短论》在历史上的影响力，所以我们在第二章中对古典理论的说明就是以拉普拉斯的论述为依据的。而在这一章中，我们会用余下的篇幅概述大约发生在1650年至1800年间导致概率论产生的一些大事（包括数学和哲学两方面），以此简要说明拉普拉斯概率思想形成的历史背景。

第二节　概率论的起源与发展（1650年左右至1800年左右）：数学[①]

关于概率的数学理论普遍认为始于帕斯卡（B. Pascal）和费马（P. de Fermat）在1654年的通信。这两位数学家对有关赌博的一些问题作出了分析，其中最著名的一个问题是梅雷骑士（M. le Chevalier de Méré）向帕斯卡提出的。这也难怪为什么泊松（S. D. Poisson）在后来会说“概率演算起源于一个老成练达的人向一位清苦的冉森主义者所提的问题”（转引自Keynes，1921：V）。在此，帕斯卡就是那位清苦的冉森主义者（Jansenist），而一个老成练达的人指的正是梅

雷骑士。然而，应该指出的是，从1651年帕斯卡父亲的离世到1654年11月23日晚他在其著名的激情之夜［night of fire（nuit de feu）］里对宗教的皈依，他一直过着放荡的生活，就在这个时期，他把大量的时间放在了赌博上。

当然，任何思想的起源从来都不会是如此的突如其来以至于它能追溯到某个特定的年份。实际上，在帕斯卡和费马之前还有几位前辈曾为此付出过努力。对三次和四次方程的求解作出过贡献的意大利数学家吉罗拉莫·卡尔达诺（Girolamo Cardano，1501—1576）是一个狂热的赌徒，他曾经写过一本专著《赌博之书》［*Book of the Game of Dice*（*Liber de Ludo Aleae*）］。这主要是一本为赌徒所写的实战手册，但它确实包含了一些关于赔率的数学计算。这本专著在卡尔达诺生前就已完成，可直到1663年才得以出版。

伽利略（G. Galileo）也曾为研究关于骰子的数学问题付出过努力，并且留下了一些大约写于1613—1623年间的手稿。当时，有一个伽利略没有透露其姓名的赌徒注意到了一个现象，于是就此向伽利略请教，这一现象是：在抛掷三颗骰子时，它们的点数之和为10的组合比其点数之和为9的组合更容易出现。然而，三颗骰子的点数之和为10的组合方式的数目却是等于其点数之和为9的组合方式的数目。伽利略通过枚举所有的可能结果正确地解决了这个问题。抛掷三颗骰子一共会出现6×6×6=216种可能结果。掷出10的可能结果有27种，而掷出9的可能结果只有25种。可见，10确实是比9更有可能出现。（伽利略的文本的英语译文可参阅David，1962：192－195）伽利略的这篇文章直到1718年才被人公开发表。

这些前辈的工作并没有促进该领域的进一步发展，而相比之下，帕斯卡和费马的通信却标志着关于概率的数学理论的系统研究与发展的开端。帕斯卡和费马的工作还在某种程度上激励了惠更斯（C. Huygens）在1657年出版了他的《论赌博中的计算》［*On Calculations in the Game of Dice*（*De Ratiociniis in Aleae Ludo*）］。正如戴维（F. N. David）的评述所言，“惠更斯的这本专著……据说在当时极受同时代的数学家们的好评，而且在其出版后的将近半个世纪里，一直都是概率论的唯一入门读物。”（David，1962：115）惠更斯的专著促进了人们对概率的进一步研究，从那时起，概率论成为数学家们普遍认可的一个研究领域。

很明显，刺激人们提出关于概率的数学理论的动因来自于对赌博游戏的分析。从惠更斯那本专著的一个英译本的书名便可看出这一点，那是由W.布朗（W. Brown）翻译、在1714年出版的英译本，它的名字就叫做《幸运轮、纸牌、骰子、抽彩等游戏中的所有机会在数学上确定的意义》（*The Value of All Chances in Games of Fortune, Cards, Dice Wagers, Lotteries, etc. Mathematically Determined*）。可是，相关数学理论的这种起源导致了一个历史问题，亦即“为什么

关于概率的数学理论在古代没有发展起来?”古希腊人都是训练有素的数学家，而且赌博在古代十分盛行。然而，现存的所有记录均不能表明古人有过任何计算赔率的尝试。正如桑布尔斯基（S. Sambursky）所言：

> ……虽然心怀诧异，但我们还是必须指出，机会游戏（game of chance）在希腊和罗马时期的任何时候都没有对科学思想产生过显著的影响，尽管当时它们很流行、无处不在。我们没能发现古人曾提及对概率的基本概念的构想，……除了以实例粗略地表达，古人也不曾谈到出现在随机序列中的规律性（大数定律）。
>
> （Sambursky，1954：179）

很多学者对这个历史问题都有所讨论（尤其请参阅 Hacking，1975：1－10）。我会在下一章中再谈论该问题，并对它作一个解答。现在，让我们略微详细地考虑帕斯卡和费马的通信。

帕斯卡的第一封信现已佚失，那个著名的问题见于他的第二封信，这封信写于 1654 年 7 月 29 日星期三。帕斯卡说道：

> 我没时间给您寄去我对那个让德·梅雷先生绞尽脑汁的难题的证明，他之所以对此大惑不解，是因为，尽管他很有才华，可他毕竟不是几何学家（您知道，这是一个极大的缺陷），他甚至不理解数学上的线可以无限分割，仍然认为它是由有限个点所构成的，而我却从未能让他摆脱这种观念。如果您能做到这一点，便会使他变得完美。
>
> 他告诉我，他发现数论中存在着一个错误的推论，其理由如下：
>
> 当某人着手抛掷一颗骰子时，如果他希望掷出一次 6 点朝上，那么抛掷 4 次会有利于出现他所希望的结果，因为在 4 次抛掷中出现一次 6 点朝上的胜负比是 671 比 625。
>
> 当某人着手抛掷两颗骰子时，如果他希望两颗骰子均掷出 6 点朝上，那么，即便抛掷 24 次，也并不一定有利于他掷出他所希望的结果。
>
> 尽管按理说，24 比 36（抛掷一对骰子会出现 36 种关于哪两面朝上的可能结果）是相当于 4 比 6（抛掷一颗骰子会出现 6 种关于哪一面朝上的可能结果）的。
>
> 他正是因此而大为恼火，这使得他逢人就说那两个比例不一致，还说算术是自相矛盾的……
>
> （David，1962：235－236）

我们将看到，我们有合理的理由假定，不管帕斯卡在引文的开头是怎么说的，他其实并没有作出过一个能解决那个难题的证明。以下是从现代的视角对该问题所作的分析。在对一颗骰子进行一次抛掷时，不出现6点朝上的机会是5/6。相应地，在4次独立的抛掷中，这个机会是（5/6）^{4}。因此，在4次这样的抛掷中，至少出现一次6点朝上的机会是$1-(5/6)^4=671/1296$，亦即其胜负比为671：625。既然德·梅雷先生看来知道这个胜负比的正确数值，那么我们就可以推测他已经掌握了某种能计算出该胜负比的理论方法。因此，通过考虑所会掷出的可能结果的比率与抛掷次数的比率的等值性，他推断在24次抛掷中同时出现两个6点的机会应该等同于在4次抛掷中出现一个6点的机会。不过，他已从其赌博经验得知，在这种情况下，同时掷出两个6点的机会是小于而不是大于1/2。倘若我们现在用现代的方法重复上述的论证，我们会得出，在对两颗骰子所作的24次独立抛掷中同时出现两个6点的机会为$1-(35/36)^{24}=0.4914$（精确到小数点后四位）。可见这个机会确实不到1/2。戴维对这则事迹作出了以下的恰当评论：

> 显然，梅雷骑士是一个如此苦心钻研的赌徒以至于他能在经验上对0.4914与0.5的概率作出区分，也就是说，他能分辨两个概率间0.0086的差量，这可与那个向伽利略征求意见的赌徒所能分辨的差量（0.0108）相媲美。
>
> （David，1962：89）

令人遗憾的是，费马给帕斯卡这封信的回信现已下落不明，但我们能从他们随后的通信中推断出费马已经正确地解决了那个问题。不过，他当时不曾用到上面给出的现代方法，而他所使用的方法帕斯卡其后称之为“您的组合法”（David，1962：239）。费马的方法在本质上与伽利略在多年前用于解决同类问题的方法是一样的。这种方法主要通过枚举4次抛掷所会出现的可能结果（或组合），从而计算出有利于出现至少一次6点朝上的那些可能结果（或组合）的数目；同理，也可以算出在把两颗骰子抛掷24次的情况下所会出现的有利结果（或组合）的数目。然而，帕斯卡并不确信这种组合法的有效性，因而使得人们有理由认为他在收到费马的解决方案之前不可能真的已经对德·梅雷先生的问题作出了解答。在他接下来的信（1654年8月24日星期一）中，帕斯卡写道：

> 当只有两位对局者的时候，您的组合法是非常可靠的，但当有三位对局者时，我想，我能证明它是不适用的，除非您是以我所未能理解的某种其他

方式来解决这类问题的。

(David, 1962: 239)

帕斯卡现在所讨论的是以下问题。假设有三个人正在赌钱，最先赢得足够局数的可以获得全部赌金。我们假定三个人都有同等可能赢得任何一局。但由于某些原因，赌局被迫中断，此时第一个人只需再赢一局就能获得全部赌金，第二个人还须再赢两局，第三个人也同样是两局。那么，应该如何分配赌金呢？

借助费马的组合法，我们能够相当容易地解决这个问题。事实上，至多再玩三局，输赢即可见分晓。让我们把第一个人赢得一局记作 a，第二个人赢得一局记作 b，第三个人赢得一局记作 c。这样，我们只需写下 a，b，c 的 27 种组合，从而分别数出有利于各人获胜的组合的数目。比方说，$c\ c\ a$ 将有利于第三个人取得胜利，如此类推。我们遵循这种方法便可求得赌金应该按照 17 : 5 : 5 的比例分配。帕斯卡在一开始时的思路是正确的，但由于推理中出现了某些混乱，所以他得出了 16 : 5.5 : 5.5 的结果。费马在他的回信（1654 年 9 月 25 日星期五）中纠正了帕斯卡的错误：

> 我仅找出有 17 种组合有利于第一个人，各有 5 种组合有利于另外两人。这是由于，当您说组合 $a\ c\ c$ 既有利于第一个人也有利于第三个人的时候，就表明您忽略了这样一个事实，亦即在一个对局者获胜后所发生的一切都是不值一提的。现在既然这一组合使得第一个人先赢了一局，那么，第三个人即便赢得紧接下来的两局又有什么意义呢？因为纵使他再连赢 30 局，那也是枉然的。

(David, 1962: 247 -248)

对梅雷骑士的问题的解答刺激了 17 世纪的数学家们设法寻求对类似的一系列赌博问题的解决方案。或许我们也不应该低估经济刺激对这种研究的促进作用。由于计算正确赔率的方法在当时还不为人所知，因此那时的赌场所给出的各类赌局的赔率都是根据经验来确定的。这样，在那些为经验所确定的赔率不是那么准确的情况下，能计算出正确赔率的人也许可以获得相当可观的收益。

紧接下来的数学上的重大进展要归功于雅各布・伯努利，其研究成果在他死后的 1713 年才得以公布，刊载于他的《猜度术》一书中。伯努利证明了关于概率的第一个极限定理。我们可以通过考虑一个简单的例子用现代的符号来说明他的成果。这个例子是：抛掷一枚有偏向性的硬币，它落下后正面朝上的概率 [*Prob*（正面朝上）] 是 p。以下定理是概率论的一个基本论断：

$$Prob\text{（在 } n \text{ 次抛掷中出现 } r \text{ 次正面朝上）} = C_n^r p^r (1-p)^{n-r} \quad (1.1)$$[②]

其中，$C_n^r = n!/[r!(n-r)!]$ 表示从 n 个事物中取出 r 个的各种不同选择方式的总数。这样一个当 $r=0, 1, \cdots, n$ 时的概率的集合被称为**二项分布**。如果我们考虑当 n 变得非常大时所发生的变化，那就会得到一个最简单的关于概率的极限定理。伯努利的研究成果是：对于任何 $\varepsilon>0$，

$$\text{当 } n\to\infty \text{ 时，} Prob(|p-r/n|<\varepsilon)\to 1 \quad (1.2)$$[③]

伯努利的证明给出了关于收敛速度的信息，他还通过以下例子来说明他的成果。如果 $p=0.6$ 并且 $\varepsilon=1/50$，那么，若抛掷次数大于或等于25550次，则正面朝上的频率（r/n）将落在29/50与31/50之间的胜负比为1000：1。

伯努利定理是现今那些所谓的**大数定律**的一个特例。然而，“大数定律”这一说法存在着歧义。我们既可以用它来指称像上述伯努利定理那样的数学定理，也可以指称诸如这样的一个经验定律：如果一枚硬币被大数次地抛掷，那么随着抛掷次数的不断增加，它落下后正面朝上的观测频率将趋向于一个确定的值。请注意，我们可以通过观察来核实这个经验定律而无须考虑任何数学定理。但经验性的大数定律与相应的数学定理之间究竟有着怎样的关系呢？是数学上的论断为经验现象提供了理论说明吗？我们稍后会继续讨论这个问题，尤其是在论述概率的频率理论的第五章。

从式1.1，即二项概率公式，我们可以获得另一个极限定理。在此，我们考虑整个二项分布，看看当 $n\to\infty$ 时它会发生什么变化。事实上，该离散分布会趋向于一种连续分布，这种连续分布的公式为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.3)$$

这个公式所表示的正是著名的钟形曲线或**正态分布**。第一个揭示了在 n 很大的情况下二项分布近似于正态分布的人是棣莫弗（A. De Moivre），他在1733年出版了其研究成果，但他当时只考虑了 $p=0.5$ 的特殊情形。自此以后的研究表明，当 n 足够大时，各种不同的概率分布均趋向于正态分布。这些研究结果如今被称为中心极限定理。图1.1是当 $p=0.6$ 时二项分布趋向于正态分布的图示。[④]

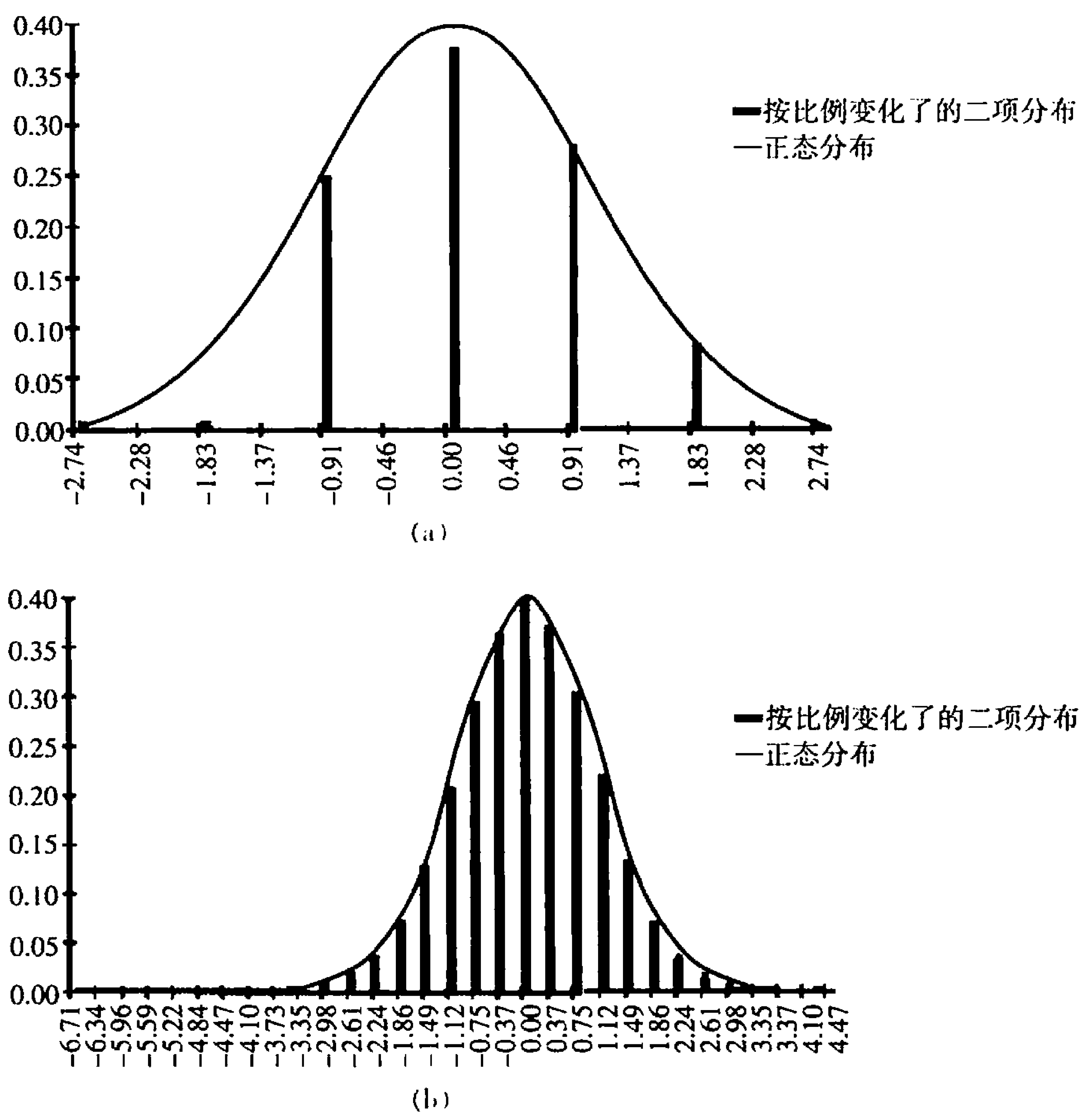


图 1.1　二项分布如何随着 n 的增大而趋向于正态分布

(a) $p=0.6$, $n=5$; (b) $p=0.6$, $n=30$

另一重大的数学成果是在 1763 年为人所知的，当年普赖斯（R. Price）发表了他已过世的朋友贝叶斯（T. Bayes）的论文。这篇论文提到了贝叶斯定理，因而标志着概率论的贝叶斯主义研究进路的开端。拉普拉斯吸收和改进了他的前辈们——特别是伯努利、棣莫弗与贝叶斯——的研究成果。他的集大成之作《概率的分析理论》（*Théorie analytique des Probabilités*）出版于 1812 年，总结了超过一个半世纪的数学研究成果以及他本人所推动的重要进展。这本书确立了概率论作为数学的主要分支的地位，使得关注它的不再只是少数人。

第三节　概率论的起源与发展（1650年左右至1800年左右）：实际应用和哲学

到目前为止，我们已经讨论了对赌博游戏所作的分析以及对这些研究成果的数学概括。然而，就在这一时期，还有一些人尝试把有关数学理论运用于赌博以外的领域。这主要是受到了最先尝试收集和分析社会统计资料的前辈的工作的激励。伦敦商人约翰·格朗特（John Graunt）于1662年出版了《根据死亡公告所作的自然与政治的观察》（*Natural and Political Observations on the Bills of Mortality*）一书，此书尝试从所收集到的有关出生和死亡的统计资料中推导出若干结论。一些数学家试图把他们的理论用于来源于许多场合的类似的经验资料。他们探讨了男性和女性的出生比率、是否值得为了防范天花而冒险接种牛痘，以及关于预期寿命和年金的恰当数额这个格外令人注目的问题。接种牛痘的问题是达朗贝尔（D'Alembert）与丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli）之间的争论主题（参见 Daston，1988：82－89）。除了这些基于统计资料的应用以外，人们还尝试把数学演算用于解决关于估算某人在所提交的证据面前被指控有罪的概率的问题，以及在证词已被法庭采纳的情况下确实会出现奇迹的概率这一相关问题。

所有这些尝试性应用都并非没有收获，但事实上他们只取得了相当有限的成功。我们可以通过年金方面的研究来对此作出说明。棣莫弗在1725年出版了《基于寿命的年金研究》（*A Treatise of Annuities upon Lives*），这似乎不曾对年金的保险业务产生过多大的影响，因为这项业务所需缴纳的保险费在当时主要是根据商人们的经验和直觉来估算的，而没有考虑任何数学因素。正如达斯顿（L. Daston）的评述所言：

> 有关年金和寿险的问题曾吸引了数学家们相当大的关注；但这两项保险的购买与提供所基于的诸多条款却与死亡率的统计数字和概率没有多大的关联，如果有的话，那也是微不足道的。保险精算师最初是文书方面而非数学方面的职位，承担着秘书兼簿记员的工作；因此，考虑到精算师的工作性质，棣莫弗、辛普森（T. Simpson）与多德森（J. Dodson）为这一读者群体所编写的工作指南仅要求他们掌握算术而已。每本这样的书都包含了很多表格，这些表格列出了已经根据年龄、生存人数与利率计算好了的年金数额，免除了读者计算的辛劳。然而，在人寿公平保险社（Equitable Society for the Assurance of Lives）于1762年成立之前，这些工作指南好像一直都只对实际业务产生极小的影响，即便到了它成立以后，数学理论方面的要求也在很大

程度上被其他的考量所削弱。

(Daston, 1988: 168 - 169)

如此看来，我们似乎无法回避这样的结论：从费马和帕斯卡肇始到拉普拉斯集其大成的这段时期，促进数学概率论发展的主要动力来自于赌博，而这种理论在实践上所取得的成功也主要体现在赌博方面的应用上。但这就导致了一个问题：为什么当今在自然科学与社会科学两大领域中有着广泛应用的这样一个严肃而重要的理论却起源于赌博这样一种轻浮的并且确实在道德上有问题的活动呢？我想，这是由于包括硬币、骰子、纸牌、轮盘等在内的标准的机会游戏可被视为研究具有随机性的现象的实验装置。不能自拔的赌徒往往沉溺于对这些装置所产生的实验性试验结果的研究，可事实上他们正是对具有机遇性与随机性的现象作出仔细检视的科学家，尽管他们的实际动机与那些对自然深感兴趣且没有私心杂念的研究者的动机相去甚远。

我们再来考虑梅雷骑士的发现：即便连续抛掷两颗骰子 24 次，也并不一定有利于至少掷出 1 次一对 6 点。他在赌桌上的经验观察使他能够意识到 0.4914 的概率小于 0.5 的概率。能得出这个精确结果的人不愧是一名费尽心思的优秀科学实验家，或许德·梅雷先生也应当获此殊荣，而无论他作出这些观察的实际动机是什么。

在自然科学领域，进行实验就是要创造一个简化的人工环境，以便在此环境中，对一个现象的研究可以排除那些不可避免地出现于真实生活中的无关因素和干扰因素的影响。实验的作用在于使科学家能够在这种纯粹的状态中研究某个现象，从而弄清楚支配它的规律。一旦这些规律被掌握，人们就有可能把它们应用于实际所出现的更为复杂的场合中。上述的这一切都确切地适用于在赌博游戏的语境中对概率的相关规律的研究，因而加强了我们对这类游戏与科学实验之间所作的类比。

同样值得注意的是，数学概率论只有在机会游戏的简化环境下经历了相当长时间的发展，才有可能被成功地用于解决经济和社会上重要的实际问题。不过，一旦掌握了这种理论，人们所获得的丰硕成果就是，可以在自然科学与社会科学中成功地对它进行实际应用；而致力于该领域研究的很多早期的数学家也肯定考虑到了这样的发展前景。其实，我们也已经在自己的时代看到了人工智能在其发展过程中所出现的同类情况。许多人工智能的早期研究成果都是关于编写下国际象棋的程序的。就其本身而言，这也许显得不那么严肃。但由这项研究所导致的一系列发展成果却有着较为重要的实用价值（欲了解进一步的详情，请参看 Gillies, 1996）。弗朗西斯·培根爵士（Sir Francis Bacon）就认为我们应该为了科

学所会带来的实惠而研究科学。可他同时又认识到，理论往往需要经过一个阶段的发展才会产生出实际成果。他写道："尽管我所追求的主要是科学的成果，最为看重的是科学的活跃领域，但我会等待丰收的时刻，而不打算割取苔藓或急于刈获尚未成熟的谷物。"（Bacon，1620：251）

在许多数学的分支学科的发展过程中，人们常常发现，实际应用和实验结果所导致的问题、纯数学的发展以及哲学的或基础的讨论三者之间是充满互动的。实际上，概率论在从费马、帕斯卡到拉普拉斯的这段时期的发展也的确如此，而概率论在人工智能方面的新近发展也遵循着同样的模式。现在，让我们转为考虑在概率论较早期的发展阶段中所讨论过的一些哲学问题。

这个阶段的一些关于概率的哲学讨论看上去根本就没有受到刚才所介绍的数学发展的影响。其中一个例子就是莱布尼茨的第一篇著作《论身份》（*De Conditionibus*），它写于1665年，当时莱布尼茨19岁。这篇论文所涉及的主要是受条件约束的权利，亦即诸如对一块地的拥有权这样的权利，要获得这种权利，仅当某一特定的条件得到满足，例如，这块地没有直系男性继承人。莱布尼茨区分了三种情形：一是肯定拥有某种权利，这用1来表示；二是肯定没有某种权利，这用0来表示；三是证据不足以确定该情形是属于第一种还是第二种，在这样的情形中对某种权利的拥有被认为是不确定的，这用0和1之间的分数来表示。这些分数当然能被看做概率。值得注意的是，莱布尼茨在听说费马、帕斯卡与惠更斯的数学研究成果之前，就已发展出了他的这种理论。尽管当他在1672至1676年间侨居巴黎时才了解到他们在这方面的工作，但自然地，他满腔热情地对此作出了回应。这一切均表明概率论在那个时候已通过某种途径流传开来了。哈金（I. Hacking）对莱布尼茨在该领域的工作有以下有趣的评论：

> 虽然莱布尼茨在概率数学方面没有建树，但他对概率的概念化却有着持久的影响。他同时代的大多数人都是从研究随机现象——赌博或死亡率——开始着手的，然后经过一定程度的思维跳跃，从而推测机会学说（the doctrine of chances）可以被转化为与非确定型推理（inference under uncertainty）相关的其他问题。而莱布尼茨是把数值概率作为一个基本的认识概念（epistemic notation）的。概率的数值表示确定性的程度。因此，他认为机会学说并不是关于赌博机制的物理特性，而是关于我们对那些机制的认识的。当他去到巴黎的时候，他发现有一种数学正好适合他新发展的认识逻辑（epistemic logic）。
>
> （Hacking，1975：89）

然而，正如哈金所暗示的，莱布尼茨早年在这方面的研究让人颇感几分意外。那个时期的大多数哲学讨论都或多或少地受到了对赌博游戏中的赔率所进行的新的数学计算的影响。其中一个明显的例子就是帕斯卡对上帝存在与否的打赌。帕斯卡于1662年辞世，其遗稿《思想录》（*Pensées*）直到1670年才得以出版，打赌论证是其中的一个片段。相关的段落在拉弗马（Lafuma）本的编次中为第418节，而在布伦士维格（Brunschvicg）本的编次中则为第233节。以下选段摘自现行的英译本：

> 那么，就让我们来检视一下这个论点吧，让我们说："要么上帝存在，要么上帝不存在。"可是，我们将倾向于哪种看法呢？理智是不能决定这个问题的。有无限的混沌把我们分隔开来。在那无限距离的远端，一枚硬币已被抛转，它落下后要么正面朝上，要么反面朝上。那你又将如何压赌注呢？理智既不能使你在二者中作出选择，也不能证明哪个选择是错误的……
>
> 是的，你必须赌上一把。你已没有选择的余地，到了这个分上就由不得你了。那么，你将选择哪一方呢？让我们来考量一下：既然必须作出选择，那就让我们看看哪一种选择对你的利害关系影响最小……既然你非选不可，所以选择一方而非另一方并不会对你的理智构成更大的冒犯。这是已成定局的一点。但你的福祉又将如何呢？让我们来权衡一下压正面朝上，即上帝存在时所涉及的收益和损失吧。让我们评估这两种情况：你若赌赢了，便赢得一切；你若赌输了，也不会失去什么。因此，不必犹豫，尽管赌他存在吧……于此可以赢得享有无尽幸福的无限生命，因为这里确实存在着一场赢局的机会，而输局的机会是有限的，再说你所压的赌注也是有限的。这便勾销了一切选择；凡是无限存在的地方以及凡是不存在无限的输局机会对赢局机会的地方都没有任何迟疑的余地，你必须孤注一掷。这样看来，由于你是被迫去赌的，因此，如果你是打算保全性命而非冒生命之险以求无限的收益（这和一无所失同样可能出现），那么你就得宣布放弃理智。
>
> （Pascal，1670：150－151）

显而易见的是，帕斯卡在成为一名简朴的冉森主义者之后仍然保留了他作为一个放荡的赌徒时所掌握的一些概念。帕斯卡的打赌论证最初发表在波尔罗亚尔（Port Royal）修道院的刊物、由其冉森派教友［可能是皮埃尔·尼古拉（Pierre Nicole）与安托万·阿尔诺（Antoine Arnauld）］所编写的《逻辑或思维的艺术》［*Logic or the Art of Thinking*（*La Logique，ou l'Art de Penser*）］上。这本有影响力的名著曾被翻译为几乎所有的欧洲语言，它的第四卷所涉及的就是不确定性推理

和概率。

不确定性推理（uncertain reasoning）的一种形式就是从过去的证据推出一般规律或具体预测的归纳推理。关于这种推理，休谟（D. Hume）提出了著名的归纳问题；这个问题最先是在其《人性论》（*Treatise of Human Nature*）（1739—1740）中提出的，其后又见于他在1748年出版的《人类理智研究》（*Enquiry concerning the Human Understanding*）[此书原名《人类理智的哲学短论》（*Philosophical Essays concerning Human Understanding*）]。正如我所详细论证的（Gillies，1987），几乎可以肯定，贝叶斯与普赖斯创立贝叶斯主义的目的就在于回应休谟关于归纳的怀疑论。这个事例表明，旨在解决哲学问题的尝试也可以催生出数学研究成果（如在1763年为人所知的贝叶斯定理）。

雅各布·伯努利的《猜度术》的第四部分探讨了如何把关于概率的数学用于解决内政、道德及经济上的问题。伯努利版本的大数定律正是在这本书的这一部分中得到论述的，在当时被认为弥合了数学家的概率与社会科学家的统计数字之间的鸿沟。该部分还提到了伯努利的哲学观点，他曾在与莱布尼茨的通信中谈过这方面的内容。由于这些观点与拉普拉斯在其《概率的哲学短论》中所宣扬的毫无二致，因而我们在下一章中才对它们进行分析。

第二章　古典理论

概率的古典理论是欧洲启蒙思想的产物，它体现了启蒙运动所特有的许多观念。尤其是我们发现，当时人们普遍推崇牛顿力学并因此而相信**普遍决定论**（universal determinism）。诚然，拉普拉斯在1814年版的《概率的哲学短论》中对普遍决定论所给出的论述是最为有名的。正是这段论述提到了所谓的**拉普拉斯妖**（Laplace's demon）。在接下来的这一节中，我会对它作出详细的阐述。

第一节　普遍决定论与拉普拉斯妖

拉普拉斯写道：

> ……因此，我们应该把宇宙的目前状态看做其先前状态的结果与将来状态的原因。倘若有一个智者，在一瞬间即能洞见使大自然生机盎然的一切力量和构成大自然的那些存在物的各自的位置——一个神通广大到足以将这些数据加以分析的智者——那么，他定能把宇宙中最庞大的天体的运动与最轻微的原子的运动悉数囊括到同一个公式之中；在他看来，没有什么是不确定的，未来如同过去，都将呈现在它的眼前。
>
> （Laplace，1814：4）

这里所描述的那个超凡的智者（intelligence）如今被称为拉普拉斯妖。这种想法明显是建立在一位人类科学家（或许就是拉普拉斯本人）的观念的基础上的，这位科学家能运用牛顿力学计算出行星与彗星未来的轨道。从这方面成功的经验外推，人们很自然地就会假定有一个能计算宇宙未来的整个运行过程的神通广大的智者。拉普拉斯把他那个超常的智者与人类在天文学上的成就联系起来。他这样说道：

> 与这个智者相比，人类的心智如今在天文学方面所能展现的完美性还是相当微弱的。但他在力学与几何学方面的发现，加上万有引力的发现，已经使他能够以相同的分析表达式去领会世界体系的过去和未来的状态。
>
> （Laplace，1814：4）

此外，拉普拉斯还清楚明确地说明，在行星和彗星的运动中所发现的规律性也同样存在于所有其他现象之中：

> 天文学为我们揭示的彗星运动的规律性无疑也存在于一切现象之中。一个简单的空气或蒸汽分子在运动时所描画的曲线肯定同样受到行星轨道所遵循的规律的支配。
>
> （Laplace，1814：6）

由此可见，典型的启蒙运动主旋律就是通过科学发展所取得的成就清除前几个时代的迷信思想和宗教信仰。从前，人们把行星奉若神明，并且出于迷信而对彗星充满恐惧。现在，人们已了解到行星和彗星的运动都是由完全一样的规律所支配的，而且还有可能准确地预测它们未来的轨道。将来，这种科学的理解力和预测力也同样会扩展到其他现象。启蒙运动时期的许多作品都体现了这一主旋律。对此，吉本（E. Gibbon）的《罗马帝国衰亡史》（*Decline and Fall of the Roman Empire*）就有一段相当优美的描写。吉本谈到了出现在公元531年查士丁尼时代的一颗彗星。他是这样说的：

> 在他当政第五年的九月份，人们可以看到一颗彗星出现在天空的西方，向北射出它的光芒，这一天象持续了20天之久……注视着这颗彗星的那些民族在惊惶失措之余纷纷料想它是战争与灾难的预兆……而这些预言日后均得到了充分的实现。
>
> （Gibbon，1776—1788：Vol. V，249－250）

然而，吉本接下来却是从当代的观点来探讨这颗彗星的，他说："在历史和传说的狭窄空间里，同一颗彗星已被发现以同等的周期——即575年——七次访问地球。"（Gibbon，1776—1788：Vol. V，250）吉本逐一描述了这七次来访，但我们对他那段文字的引述将从第四次开始：

> 第四次出现是在基督降生前44年，比其他各次都要壮观与重要。恺撒逝世后，一颗披着长发的星星引起了罗马及其周边民族的注意，当时年轻的屋大维为了纪念维纳斯和他舅公，正在举办各种竞赛活动。民间传闻说它是来将独裁官的英魂送进天堂的，出于孝道，这位政治家接纳了这种见解并对此表示衷心的赞许；而他私底下的迷信念头其实是把该彗星看做属于他自己时代的荣耀。第五次到访前面已说到发生在查士丁尼掌权的第五年，这一年

正是基督纪元的531年。或许值得注意的是，正如先前的那一次，这次在彗星出现之后——尽管中间隔了较长的时间——跟着发生了太阳不同寻常的黯淡无光的情况。第六次重游是在1106年，欧洲和中国的编年史均有记载；而且这回是在十字军东征的狂热时期，基督徒与穆罕默德的信徒可能会出于同样的理由而猜想它预示着异教徒的灭绝。第七次是发生在1680年的现象，展现在了开明年代的眼前。贝尔（P. Bayle）的哲学消除了弥尔顿（J. Milton）刚刚才用其才情加以装点的认为彗星“从它那令人厌恶的长发中散布瘟疫和战争”的成见。弗拉姆斯蒂德（J. Flamsteed）和卡西尼（J. D. Cassini）借助高超的技巧观察到了它在天空的轨道，而且伯努利、牛顿（I. Newton）与哈雷（E. Halley）也已查明了它的运行规律。第八次来临的时间将在2255年，他们的计算也许会被位于西伯利亚或美洲的荒野上的某个未来首都中的天文学家们所证实。

（Gibbon，1776—1788：Vol. V，250－251）

在此，吉本将罗马时期和中世纪人们对彗星的态度与当它呈现在“开明年代的眼前”时人们看待它的方式形成对照，在开明年代，前几个时代的宗教迷信已为牛顿和伯努利的精密科学所取代。他对那颗彗星下次出现的预言也同样令人感兴趣，而且极有可能被证明是正确的。

在拉普拉斯的时代，牛顿力学的成就让大部分的思想家倾向于接受普遍决定论。我们自己时代的科学发展，尤其是量子力学的发展已经使普遍决定论遭到了批评，并导致思想家们在较大程度上倾向于认为宇宙在本质上是非决定论的。值得注意的是，拉普拉斯以为相同的规律既适用于非常大的物体也适用于非常小的物体。他那个超凡的智者“能把宇宙中最庞大的天体的运动与最轻微的原子的运动悉数囊括到同一个公式之中”（Laplace，1814：4）。达斯顿（Daston，1988：244）提出了一个很有意思的见解，即这种根据宏观物体对微观物体所作的推论其实是基于牛顿在《原理》（*Principia*）中所给出的推理规则的。诚然，牛顿的规则Ⅲ正是这样说的：

物体的性质，若其程度既不能被增强又不能被减弱，并且属于实验所及范围内的所有物体，则应被认为是一切物体的普遍性质。

（Newton，1687：398）

从上述规则可以推出，支配可观察的宏观粒子的运动的规律（即牛顿力学）应该被认为对于那些构成物质的极小的微观粒子也是成立的。量子力学却表明这个

假设是错误的，因为像电子这样的微观粒子所服从的是一组相当不一样的规律。再者，这些量子力学的规律绝对是要涉及概率的，因而暗示着一个令人满意的宇宙结构可能在性质上是非决定论的。这正是当代的观点。但现在还是让我们回到19世纪去看一看，基于其普遍决定论的信念，拉普拉斯是如何设法弄明白那些对概率造成影响的因素的。

第二节 等可能情况

在一个完全受决定论支配的系统中，概率不可能是该系统的客观本性所固有的，而必然是相对于人的无知的。假设在某一特定的场合中，看上去有三种可能的结果：A，B或C。由于普遍决定论，其中一个结果（例如A）肯定会出现，而且拉普拉斯妖也能预见A的出现。然而，对于自然规律或初始条件，又或者它们二者，如果我们人类没有足够的认识，那么我们也许就不能预测A，B或C哪一个将会出现。在这种情况下，我们唯有求助于概率演算。拉普拉斯这样写道：

> 一个简单的空气或蒸汽分子在运动时所描画的曲线肯定同样受到行星轨道所遵循的规律的支配；它们之间的差异只是来源于我们的无知。
>
> 概率是相对的，部分地相对于我们的无知，部分地相对于我们的知识。我们知道在三个或更多的事件中总有一个要发生；但是没有什么能使我们更为相信其中某一个事件而非其他事件将会发生。在这种不确定的情形下，我们不可能肯定地宣称它们哪一个将会发生。
>
> （Laplace，1814：6）

在“没有什么能使我们更为相信其中某一个事件而非其他事件将会发生”的这种情况下，拉普拉斯认为，我们必须把各个事件都看做是等可能的（equally possible）。此外，概率演算只能运用于存在若干等可能情况的场合。假设存在n种这样的情况，其中有m种有利于结果A的产生，那么A的概率［*Prob*（A）］则被定义为

$$Prob(\mathrm{A}) = m/n$$

这就是基于等可能情况的著名的古典概率定义。从这个定义可以直接地（至少借助有限可加性）[①]推出标准的概率公理。现以一颗匀称的骰子为例，简单地对

古典定义给予说明。对于这样的一颗骰子，我们有六种等可能情况，即朝上的那一面为1点，2点，……，6点；其中有三种情况（1点朝上，3点朝上，5点朝上）有利于“奇数点朝上”这一结果的产生，因而该结果的概率为3/6=1/2。

拉普拉斯本人给出了如下的定义：

> 机会理论（the theory of chance）旨在把所有同类事件归约为一定数目的等可能情况（也就是说，归约为我们对它们各自的存在都同样地不可能作出断定的那些情况），继而确定对于我们欲求其概率的事件有利的那些可能情况的数目。这个数目与所有可能情况的数目的比率就是对所求概率的测度，因此，概率其实是一个分数，它的分子是有利情况的数目，分母是所有可能情况的数目。
>
> （Laplace，1814：6－7）

这种定义概率的方式在数学家中处于支配地位将近一个世纪之久。比方说，俄国数学家马尔可夫（A. A. Markov）在1912年出版了一本论述概率的书，其中不乏数学上的创建，例如马尔可夫链理论（the theory of Markov chains），但他仍然采纳古典定义作为演算的基础。对古典概率定义长期而广泛的接受就某些方面而言是相当出人意料的，因为从已知事实来看有颇为明显的理由反对古典理论，冯·米泽斯（R. von Mises）就曾强有力地表述过他的反对意见。

冯·米泽斯问道：“倘若一个理论所能识别出的只是基于一定数目的等可能结果的概率，那又叫我们如何借助它来处理关于具有偏向性的骰子的问题呢？”（von Mises，1928：69）事实上，好像并不存在任何方式让古典理论能借以处理与具有偏向性的骰子相关的情况，但也当然有人不愿意把概率论排除在与具有偏向性的骰子相关的场合以外。

其实，拉普拉斯在其《哲学短论》的第七章中谈到了与具有偏向性的硬币相关的情况，这一章的题目叫做“关于可能存在于假设为均等的机会之间的未知的不均等性”（Laplace，1814：56）。此外，在他对概率的数学研究中，他还曾考虑过这样的一种情况：在这种情况下，抛掷一枚硬币得到正面朝上的机会是$(1+\alpha)/2$，得到反面朝上的机会是$(1-\alpha)/2$，然后他就根据这两个数值继续进行计算（参见Todhunter，1865：470，598）。这似乎意味着抛掷一枚硬币得到正面朝上的概率是客观存在的，尽管它可能是未知的；但如此一来，势必与拉普拉斯自己的观点，即概率只是人类无知程度的测度相抵触。这看起来好像拉普拉斯在发展数学理论的时候忘记了他的哲学基础。

第三节　双面的概率

我们若抱持一种较为同情的态度，可以认为拉普拉斯的困惑来源于他部分地而非完全地认同哈金最近所谓的概率的双面性（the Janus-faced character of probability）。两面神雅努斯（Janus）是罗马的神，一月（January）便是以他来命名的。他是“开始”之神，以两副面孔为象征，也许一张脸回顾过去而另一张脸展望未来。哈金论证道：

> 概率……是双面的（Janus-faced）。一方面，它是统计的，与关于机会过程（chance process）的随机规律有关。另一方面，它是认识论的，被用于评价人们对那些毫无统计背景的命题的置信度是否合理。
>
> （Hacking，1975：12）

达斯顿声称概率的双面首先由泊松在 1837 年加以区分，其后库尔诺（A. A. Cournot）与埃利斯（R. L. Ellis）在 19 世纪 40 年代初期也曾对此作出过区分。她说：

> 自从 19 世纪 40 年代库尔诺和罗伯特·埃利斯（Robert Ellis）根据相对频率重新评价数学概率的基础以来，对两种概率——亦即，用库尔诺的话说，表示“一种潜存于事物自身间的关系的实在性”的“客观可能性”与涉及“因人而异的个人判断或感觉的方式”的“主观概率”——的区分，已经成为所有关于概率论的解释的讨论的出发点。然而，在 18 世纪的较大部分时间里，概率论家们都可能会觉得这样的一种区分怪怪的。他们可以很容易地在其研究中调和概率的客观意义和主观意义，这不免使后世的评论家们感到困惑。
>
> （Daston，1988：191）

达斯顿无疑是正确的，自从 19 世纪 40 年代以来，对概率解释的二分就成为那些关于该研究对象的基础的讨论的一个特点。不过，正如我们早已提到的，在使用什么术语来标示这一区分方面，概率论家之间一直存在着相当大的分歧。现在就让我们来重新考虑一下学者们对此所提的建议吧。

波普尔用到了上面达斯顿所提及的术语，他写道：

> 概率论的**主观解释**……把概率的大小视为对确定或不确定、相信或怀疑的感觉的测度。这些感觉可由一些特定的断言或猜测在我们心中引起。对于某些非数值陈述，“或然的”一词可借助这种方式得到相当令人满意的转译；但在我看来，用这些方式并不能十分让人满意地解释数值概率陈述……**客观解释**把每个数值概率陈述视为关于出现在一个**由所发生的事情构成的序列**中的某类事件的**相对频率**的陈述。
>
> （Popper，1934：148－149）

请注意这个有趣的现象：波普尔在此是把概率的客观解释等同于频率理论的，但后来（在1957年）他又提出了一个新的客观解释——倾向理论。我会在第六章详细讨论这一转变。此外，对波普尔而言很有代表性的是，他拒绝接受概率的主观进路。这是他终其一生对该研究主题的看法的一个不变的特征。

这样使用术语所带来的问题是，概率的“主观”解释既包含了将概率等同于置信度的概率的主观理论，也包含了将概率等同于合理置信度的逻辑理论。如此一来，“主观的”既被用做一个一般的分类词，又被用于指称某个具体的理论。想必这是不能令人满意的。同样的理由也可用于反对我在早期的著作中所使用的术语，当时我用“**逻辑的**”（logical）和“**科学的**”（scientific）分别命名概率的双面（参见Gillies，1973：1）。在那本书中，“逻辑的”一词不仅被用做一个一般的分类词，而且被用来指称某种解释。哈金为我们指出了消除这些问题的方法，他建议用“**认识论的**”或“**认识的**”去指谓这样的一组理论。在我看来，这是一个极好的提议，因为“认识论的”这个术语能够合宜地用于指称那些把概率等同于认识或无知的程度又或者置信度或合理置信度的理论。因此，我会在本书中采用这一术语。

现在让我们转过头来看一看概率的另一副面孔。对此，哈金建议用“**偶然的**”（aleatory）这一术语来指称。也许是由于一个不太严肃的理由，亦即用英语来念这个来源于拉丁语的词显得相当困难，所以我觉得它不太适合。在我早期论述概率的著作中，我使用“科学的”这个术语；我当时的想法是，这一术语所指的是出现在诸如物理学或生物学这样的自然科学理论中的那一类概率。然而，我随后的研究已显示出这一术语的使用面临着困难。我在第九章的论证会表明，适合于经济学理论的那类概率是认识论的。不过，我并非打算借此暗示经济学理论必然是非科学的。于是我最终决定采用波普尔的术语“客观的”，因而把概率解释分为“认识论的”与“客观的”两大类。

说句公道话，尽管在我看来“客观的”这个术语是在全面考虑之后的最佳选择，但它也确实带来了一个问题。逻辑理论的某些版本，包括我们将在下一章

作出考察的凯恩斯（J. M. Keynes）的版本，认为概率关系（probability relation）存在于某种类型的柏拉图世界（Platonic world）之中，人的心灵凭借直觉就能知道那个世界所包含的东西。如此一来，这种理论虽然是认识论的，但它却认为概率在某种意义上是客观的。为了克服这个问题，我建议对“在物质的意义上是客观的”与“在柏拉图的意义上是客观的”作出区分。前者用于指称物质世界中的客体，后者则用于指称存在于一个假设的柏拉图世界中的客体。当我们单独地使用“客观的”的时候，它就会被理解为“在物质世界中是客观的”。“客观的”的其他含义则总可被认为“在柏拉图的意义上是客观的”。因此，当我们把关于概率的理论划归为“认识论的”或“客观的”的时候，“客观的”就要被理解为它所指称的是物质世界中的客体。术语的选择反映了特定的理论观点，我之所以这样选择，是因为我不相信充斥着抽象客体的柏拉图世界的存在。

对“客观的”这一概念进行分析是一件困难的事情。事实上，人们可以说这是哲学中最为根本的问题之一。在第八章中，我会通过引入“主体间的”与“人工制品性的”这两个概念进一步地探究这个问题。因此，现在暂时不讨论关于术语的这些问题，而让我们继续检视概率的古典理论，看看它是否应该被划归为“认识论的”或“客观的”。

对于这一点，有一些值得讨论的地方。哈金写道：

> 总而言之，在1660年左右，很多人都各自独立地突然萌发出关于基本概率的想法。这些分散的思想经过了较长的一段时间才得以汇总到一起，但它们全部都是同时产生的……值得注意的是，如此迅速而意外地突现的概率其实是生就双面的。
>
> （Hacking，1975：11－12）

这似乎意味着，在直到拉普拉斯为止的早期发展阶段，概率论家们已经区分了概率的认识论的一面与客观的一面。然而，正如我们刚才看到的，达斯顿认为，直到进入19世纪后的好些年，概率的认识论意义和客观意义才得到了区分。她断言，概率论家们在此之前“都可能会觉得这样的一种区分怪怪的”（Daston，1988：192）。她还提出了一个别出心裁的理论来解释为什么当时没有进行这种区分。根据她的观点，概率论家们对联想主义心理学（associationist psychology）的普遍接受使得这样的区分成为不必要的。她说：

> 经验凭借感觉间反复发生的相互联系可产生出信念和概率，而心灵则能在观念间的联结中对感觉进行复制。被观察到的相互联系出现得愈发恒常与

频繁，心理联想就会变得愈发强烈，从而使概率和信念得到增强。因此，关于经验的客观概率与关于信念的主观概率在秩序井然的心灵中是互为镜像的。这就是为什么以丰富的经验为依据的直觉判断可供信赖的原因。倘若古典概率论家把合乎理性的人作为他们的标准，那也是由于在一定程度上那个人的合理性在本质上是具有概率性的。

(Daston，1988：197)

我个人的看法是，直到拉普拉斯为止的那个时代的概率论家们其实认为概率是认识论的而非客观的。确实就如我们所看到的那样，拉普拉斯会偶尔使用某些似乎暗示未知机会的存在的说法，但我倒是愿意把这理解为措辞上的小疏忽或行文上的不一致，而不是对客观概率的承诺。因为那个时代的所有概率论家都坚信普遍决定论，所以很难看出他们除了把概率作为对人类无知程度的测度以外还能把它设想为什么。

我这个结论在很大程度上得到了拉普拉斯对他自己所给出的一个有趣例子的态度的支持。该例子的可贵之处在于，它以显著的方式阐明了认识论概率和客观概率之间的差异。拉普拉斯假设：某人（比方说 A 女士）得到了可靠的信息，知道一枚硬币是有偏向性的，却未被告知偏向哪一面，并且她被要求说出这枚硬币掷出正面朝上的概率。如果 A 女士持一种认识论的概率观，那么她会回答说 *Prob*（正面朝上）= 1/2，这是因为，没有理由使她偏爱某一结果而非其他结果，既然她对这枚硬币偏向于哪一面是无知的。如果 A 女士持一种客观的概率观，那么她会回答说 *Prob*（正面朝上）= p，其中 $0 \leqslant p \leqslant 1$，并且除了明摆着 $p \neq 1/2$ 以外，p 的值在其他方面都是未知的。这明显地揭示了两种探求概率的方法的差异。根据其中的一种，*Prob*（正面朝上）正好是 1/2；而根据另一种，对于 *Prob*（正面朝上），我们所知的一切就是它确实不等于 1/2。拉普拉斯本人毫不含糊地表明自己支持认识论的观点。他写道：

不过，如果这枚硬币中存在着一处不均匀的地方，它可以导致正反两面中的一面而非另一面在该硬币被抛掷后成为朝上的一面，但我们却不知道这处不均匀的地方偏向哪一面，那么第一次掷出正面朝上的概率将恒为 1/2；由于我们事前对这处不均匀的地方偏向哪一面是无知的，因此，如果我们事后发现这处不均匀的地方有利于正面朝上，那么该简单事件的概率便会随即增大，反之，其概率则会减小。

(Laplace，1814：56)

我将以拉普拉斯的一句名言来结束我对其概率思想的论述，在我看来，它在今天有着特殊的相关意义。这句话是，“……概率论实际上只是被归约为演算的常识……”（Laplace，1814：196）。在现代的语境中我们也可以说，人工智能实际上只是被归约为演算的常识，因为在人工智能领域中，人们也是先仔细考虑某种需要行为实施者们运用他们根据知识或经验所获得的常识才能实施的人类智能行为——比方说医学诊断，然后再尝试为实施该行为的整个过程建立数学模型，使它能够由计算机来实施。

第四节　为什么概率论在古代没有发展起来

很可能有许多因素阻碍了古希腊人对概率论的发展。然而，我们对概率论在17世纪的起源的分析的确表明了有两个因素可能是它发展的重大障碍。古希腊人都十分精通数学，但他们所掌握的专门知识最主要是在几何学领域。概率论的发展所需要的是算术与代数的知识——这两个正是希腊人往往容易忽略的领域。希腊人的数学表征系统颇为拙劣，很难进行我们的算术运算，而17世纪的数学家们却使用着我们现代的印度/阿拉伯十进制。至于代数方面，希腊人只有烦琐的几何代数学（geometrical algebra），而我们现代的初等代数学体系是在1650年之前的一个世纪左右才得到发展的。事实上，最早对某些概率进行计算的卡尔达诺也曾致力于三次方程的求解。倘若缺乏合适的代数符号，二项分布可以得到确切的表述吗？假使没有代数与微积分这两门学科的发展，雅各布·伯努利和棣莫弗还能提出他们的极限定理吗？希腊人既是狂热的赌徒又是老练的数学家，可他们的数学就偏偏不适合用来分析赌博。

此外，还有另一个因素妨碍了概率论在古代的发展。我们已经看到，最先得到解决的那些概率问题都是与规则的骰子有关的。假定每一面朝上都是等可能的对于那些问题的解决至关重要，因为解决方法就在于先数出所有的可能结果，然后再从中区分出有利于所求结果的那些可能结果的数目。这个方法完全不可能运用于不规则的骰子。在古代进行赌博所使用的并不是现代意义上的骰子而是距骨（astralagus）。距骨是羊或鹿脚踵上的一块小骨头。它有四个可以让它稳固地着地的平面和两个圆面。四个平面由两两相对的两对平面所组成，它们被分别标上点数1，6以及3，4。2和5这两个点数被省略掉。1点被称为“狗”，人们认为这是不好的结果。最好的结果是四颗距骨分别掷出不同的点数，叫做“维纳斯”。戴维通过抛掷现代的羊距骨发现，“掷出1点和6点的经验概率大概分别为1/10，而掷出3点和4点的经验概率大约分别为4/10”（David，1962：7）。这些经验概率还很可能会因为距骨的不同而不同。在这样的复杂情况下，要着手

计算赔率往往是非常困难的。

古代也有我们意义上的骰子，但大多数都是不规则的，而少数规则的骰子又不曾被广泛用于赌博游戏。正如戴维所言：

> 传统的骰子相互间在材料和制作工艺上都存在着相当大的差异。许多这样的骰子给人留下的印象是，制造者随手挑一块石头、木头或骨头，粗略地将它做成骰子的形状，再标上点数之后就拿来用了……即便存在着认为这些有瑕疵的骰子似乎肯定不比距骨好的想法，可能也不值得大惊小怪。但还是有例外的。我所见过的一些传统骰子不仅做工精美，边上雕有花纹，而且抛掷结果绝对公正。
>
> （David，1962：10－11）

至于说不规则的骰子阻碍了概率论在古代的发展，我们也可以提出这样的异议[②]：毕竟希腊人和罗马人都有质量均匀分布的硬币，这些硬币本来是可以作为概率论研究的起点的。可是，在17世纪，几乎所有早期的概率计算都涉及骰子。这多半是因为重要的赌博游戏都是拿骰子来进行的，而古代往往是用距骨。

如果认为距骨的不规则性制约了概率论的发展的看法确实是正确的话，那么这就为概率的古典理论提供了某种历史辩护。这个理论是以等可能情况作为概率的基础的，而且实际上，在概率论的早期发展阶段，数学运算只有依据这一简单化的假设才有可能进行。只要概率论所探讨的主要是关于规则的硬币和骰子以及洗得很均匀的纸牌的问题，概率的古典理论就的确可以为该研究主题提供一个恰当的基础。然而，从19世纪中叶起，概率论开始被越来越多地运用于自然科学（物理学和生物学）以及社会科学和经济学。对于这些新的应用领域，以等可能情况为根据的旧基础就不再恰当了，因此，在整个20世纪，人们始终接连不断地设法为这一研究主题提供一个更好的基础。最近，概率在人工智能领域的新颖应用则为这项工作的持续开展提供了一个当下的重要促进因素。

不过，并不仅仅是概率论在现代的全方位应用使得我们对概率的古典理论感到不满意。古典理论包含了启蒙时代的大多数思想家所持的一些假设，可今天在我们看来它们似乎不再显得合理。普遍决定论便是这样的一个假设。而其中还有一个假设是达斯顿在她1988年的书中有所强调的，那就是，理性的人基于经验的推理是对世界上所发生的事情的准确反映，因此无须在主观和客观之间作出明显的区分。毕竟18世纪是理性的世纪，但20世纪可不是这么一回事。

20世纪的一个特征在于数学工具和科学仪器的运用，它们在力量上远远超越了存在于18世纪的任何东西；而另一个特征则是突发的暴力行为和各种没有

理性或科学基础的信念的普遍存在。这一对相互矛盾的特征在希特勒统治时期的德国表现得尤为明显，该国把数学和科学方面的技能用到工业管理上并取得了令人瞩目的成就，但当时占支配地位的纳粹党的种族思想则根本没有科学基础可言。当然，这或许是一个最为极端的例子，可是类似的矛盾在某种程度上存在于20世纪的几乎所有社会当中。现时最为流行的两种关于概率的哲学理论也许部分地反映了这种情况。它们分别是极端客观的倾向理论与主观理论，前者把概率视为物质世界的一部分，而后者则把概率变为对于一个特定的人的私人信念的测度。本书其中一个主旨就是要尝试找出克服这种令人不安的明显的二分法。

在下一章，我们会考虑在20世纪最先出现的关于概率的哲学观点——逻辑理论。这种观点由凯恩斯所提出，形成于爱德华时代的剑桥。逻辑理论最为近似于传统的古典观点，或许是由于那个时候的剑桥促进了理性时代的思想和理想的最后的繁荣。这段繁荣时期随着第一次世界大战的爆发而走到了尽头。第一次世界大战相当惊人地展现了非理性与科技的精妙性在20世纪一次有代表性的结合所产生的影响。

第三章　逻辑理论

在20世纪的头几十年，概率的逻辑理论主要在剑桥得到了发展，尽管它随后的发展是由维也纳学派的成员及其伙伴所继续推动的。卡尔纳普在20世纪50年代是对逻辑理论表示支持的，而且波普尔在那个时期也主张这种理论，虽然他所拥护的是一个有几分与众不同的版本。在后面的章节中我还会偶尔谈到该理论后来的一些发展，但在这一章，我将专注于“一战”前爱德华时代的剑桥，尤其是把注意力放在凯恩斯的工作上。不过，在那个时期的剑桥，凯恩斯并不是第一个又或者唯一的一个致力于概率的逻辑理论研究的人。W. E. 约翰逊（W. E. Johnson）在这方面的研究要早于凯恩斯，凯恩斯就曾经听过他的讲座。而听过这些讲座的还有哈罗德·杰弗里斯（Harold Jeffreys），他对概率的逻辑理论作了进一步的发展，提出了自己的逻辑理论，其研究成果最终在1939年以书的形式出版。然而，我之所以选择把重点放在凯恩斯身上，是因为在这些著述家当中，只有他最为重视哲学方面的研究，而这也正是本书的主题之所在。爱德华时代的剑桥催生了哲学发展史上的一个显要的巅峰时期，由此造就了伯兰特·罗素（Bertrand Russell）、G. E. 摩尔（G. E. Moore）、青年维特根斯坦（L. Wittgenstein）以及凯恩斯，而凯恩斯在概率哲学上的工作也在一定程度上为这个时期的哲学繁荣作出了贡献。可见，我们最好把凯恩斯个人的工作放到这一哲学语境内来进行理解，因此我将在紧接下来的一节谈一谈这方面的内容。

第一节　爱德华时代的剑桥①

我会把从1900年左右到第一次世界大战爆发的这段时期看做爱德华时代。虽然这与爱德华七世（Edward Ⅶ）从1901年到1910年的统治时期并不相当一致，但这个称谓应该说是恰如其分的。当然，那位英国最高统治者本人并未对我们将要考察的哲学发展产生过重大的影响，可是他却启发了罗素提出那个著名的例子“法国国王是秃头的”。的确，罗素写道：“如果我们说‘英国国王是秃头的’，那么，这看上去是……一个关于由此意义所指谓的真实存在的人的陈述。不过，现在要考虑的是‘法国国王是秃头的’。”（Russell，1905：46）这很可能是当时的哲学唯一的一次间接提及爱德华七世。我实际上是以爱德华时代来指称

从世纪之交到第一次世界大战爆发的这段历史时期——这个时期具有它自身特殊的社会、文化与知识特征。若要用一个简短的词组来形容该时期，也许“悖论的时代”可以派得上用场。很多逻辑悖论正是在这个时期为人所知的，而且正如我们将要看到的，凯恩斯对某些概率悖论格外关注。尽管出现了这些悖论，但由于当时的思想家们还保留了大量古旧的信念，仍然信任理智的力量，因而他们认为只需对逻辑加以改进以及对理性作出更好的分析就可以克服这些困难。不过，这种信念行将被第一次世界大战的爆发、法西斯主义的兴起以及20世纪30年代大萧条的出现所粗暴地摧毁。

1921年凯恩斯出版了《论概率》(*Treatise on Probability*)，以书的形式公开发表了他对于概率的观点。然而，这本书的撰写工作其实在爱德华时代就已经完成了。诚然，《论概率》在1913年就已经印出了校样，但大战的爆发却耽误了它的出版，因为在此后的日子里凯恩斯一直忙于战争期间的工作以及巴黎和会的事务，而且还在1919年出版了《和平的经济后果》(*The Economic Consequences of the Peace*)，对凡尔赛条约作出批判。只有等到这些事情都结束以后，凯恩斯才得以完成《论概率》的出版事宜。因此，正如斯基德尔斯基（R. Skidelsky）所言：“……《论概率》是一本战前的书，所反映的是战前剑桥做哲学的方式。”(Skidelsky，1992：56)

凯恩斯在1902年秋成为剑桥国王学院（King's College Cambridge）的一名本科生，并于1903年2月加入一个名为使徒会（the Apostles）的秘密协会。该协会的成员均把自己看成是——而且确实大部分都是——剑桥最优秀的才智之士。这是一个由精英中的精英所组成的团体。这个团体的活动之所以处于秘密状态是为了确保成员们可以自由地表达非正统的意见而无须担心会遭到社会的报复。尽管很久以后有若干名使徒会成员被发现是俄国的间谍，从而使该团体的名声受损，但在凯恩斯入会的时候，使徒会声望正隆，对当时诸多智力成果的获得均起到了关键的作用。而在剑桥没有参与使徒会活动的唯一一位大哲学家就是维特根斯坦。他于1911年来到剑桥跟随罗素学习，并在1912年11月正式入选使徒会。不过，在仅仅参加了一次聚会之后，他就退出了这个团体。再说，维特根斯坦也不是一个非常合群的人，因而在其以后的一个人生阶段里，他拒绝参与另一个著名的知识分子团体——维也纳学派——的活动，就连一次聚会也没参加过。虽然维特根斯坦对使徒会的态度并不友善，但是就像他日后受到了维也纳学派的影响一样，他当然也会受到战前剑桥的各种思想倾向的影响。实际上，维特根斯坦于1921年出版的《逻辑哲学论》(*Tractatus Logico-Philosophicus*)就包含了对概率的逻辑理论的概述（参见命题4.464以及5.15－5.156）。

凯恩斯在1903年加入使徒会，当时最为令人钦佩的两位使徒是伯兰特·罗

素和G. E. 摩尔，罗素于1892年成为会员，摩尔也在1894年就被吸收进入协会。正如这些入会的年份所表明的，罗素和摩尔要比凯恩斯大10岁左右，而且他们还对其思想发展产生了相当大的影响。他俩都在1903年出了一本书。罗素的是《数学原则》（*The Principles of Mathematics*），摩尔的是《伦理学原理》（*Principia Ethica*）。在其1938年的演讲《我的早期信仰》（“My Early Beliefs”）中，凯恩斯在谈到他早期对于概率的研究工作时就说过：“我当时的写作受到了来自于摩尔的《伦理学原理》和罗素的《数学原理》（*Principia Mathematica*）两方面的影响。”（Keynes，1938：445）现在让我们先来看一下罗素对他的影响。

从1903年到1910年间，罗素正致力于实施数学基础研究中的逻辑主义纲领。这个纲领的目的在于，建立一个其公理均为不证自明之逻辑真理的形式化公理演绎系统，并使任何数学定理都有可能在该系统中得到证明，他力图在此意义上把数学还原为逻辑。早于罗素去尝试实施这个纲领的是德国逻辑学家弗雷格（G. Frege），但罗素对一个基础的逻辑悖论的发现表明弗雷格的系统并不管用（欲了解更多的历史细节，请参看Gillies，1982：91－93）。在1903年出版的《数学原则》中，罗素公布了这个悖论以及他运用被称为类型论的方案来克服此困难的最初尝试。在接下来的七年里，他发展了自己的逻辑系统，并在另一位使徒——怀特海（A. N. Whitehead）——的帮助下，在《数学原理》这部关于形式化的数理逻辑的三卷巨著中对其作出了详尽的说明。第一卷于1910年问世，罗素说：“尽管这部著作的第三卷要到1913年才出版，但我们对这部书的分内工作（除校对以外）在1910年已告完成，当年我们就把全部手稿交给了剑桥大学出版社。”（Russell，1959：74）

在这个时期里，罗素实际上并非供职于剑桥，可是他仍然与使徒会保持联系。他当时的确花了大量的时间与其中一位会员（怀特海）合作。直到1910年10月罗素才作为三一学院的研究员兼数学原理讲师重返剑桥。不过，勿庸置疑的是，即使是在1903年至1910年的这段时期里，他也跟凯恩斯有过很多次的讨论。罗素在其自传中说：“我最初认识凯恩斯是通过他的父亲……凯恩斯的父亲在剑桥教旧式的形式逻辑……”（Russell，1967：71）关于凯恩斯本人，罗素说道：“我相当关注他的《论概率》，这本书的很多部分我都跟他详细讨论过。”（Russell，1967：71）罗素在同一页还谈到凯恩斯曾于1904年到郊外探望他，与他共度周末。在后面的段落里，罗素评论道：“凯恩斯的思维能力是我所知道的人中最敏锐和最清晰的。每当我和他辩论的时候，我都感到我是在冒着生命的危险，而且总是觉得自己多少有点像个傻瓜。”（Russell，1967：72）

那么，罗素在逻辑方面的工作究竟是如何对凯恩斯产生强有力的间接影响的呢？要看出这一点并不困难。罗素以往一直致力于研究那些可被用于数学的演绎

逻辑原则，但那种在科学和大量的日常思考中都具有典型性的从证据到假说和预测的推理又是怎样的一种推理呢？可以认为，为了说明这样的经验推理，人们既需要一种演绎逻辑，也需要一种归纳逻辑，而且这种归纳逻辑要与概率论密切相关，或许就完全等同于概率论。凯恩斯的《论概率》的第二篇所讲的就是如何把概率论构建为一个形式逻辑系统，因而他开篇就说："各位读者很容易就能觉察到，若非受到罗素先生的《数学原理》的影响，这一篇是绝对写不出来的。"（Keynes，1921：115）此外，在完成《数学原理》之后，罗素本人开始对归纳逻辑产生兴趣。罗素于 1912 年出版了《哲学问题》（*Problems of Philosophy*）一书，其中的第六章是关于归纳法的，他在此主张一种概率主义的归纳推理研究进路。这里是一个典型的例子，从中我们可以看到同一个知识分子圈子的成员的相互影响。凯恩斯在其《论概率》的前言中写道："人们可以觉察到，我受到了 W. E. 约翰逊、G. E. 摩尔与伯兰特·罗素的很大影响，也就是说，受到了剑桥的很大影响……"（Keynes，1921：V），而罗素也在其《哲学问题》的前言中写道："我从 G. E. 摩尔先生和 J. M. 凯恩斯先生尚未出版的著作中获得了宝贵的帮助：……后者是在关于概率和归纳法方面。"

尽管罗素无疑是对凯恩斯产生了相当巨大的影响，但似乎促使凯恩斯致力于研究概率基础的首要影响来自于摩尔。按照斯基德尔斯基的说法：

> 凯恩斯对概率的意义的探究占去了他在 1906 至 1914 年间的大部分闲暇时间。但他对这个主题的初次讨论可以追溯到 1904 年 1 月 23 日，当时他在使徒会宣读了一篇题为"关于行为的伦理学"（Ethics in Relation to Conduct）的论文。这清楚地表明，他的兴趣直接产生于《伦理学原理》的问世对他在思想上所造成的震荡。
>
> （Skidelsky，1983：152）

这种说法与凯恩斯本人对往事的回忆相一致，他写道："我对于在他（即摩尔——引者注）关于正确行为的理论中所涉及的或然性的思考，在很大程度上是促成我把多年来的所有闲暇时间都用于研究这一课题的重要原因。"（Keynes，1938：445）凯恩斯竟然把他在概率方面的工作描述为**消闲活动**，实在是有点与众不同！1907 年 12 月 12 日，为了竞争国王学院的专职研究员职位，他提交了一篇论述概率的专题论文，但他未能如愿，因为 1908 年 3 月 17 日该学院把研究员职位给予了多布斯（A. E. Dobbs）和佩奇（W. N. Page）两位先生而不是他。然而，剑桥并非有意驱逐它的这颗冉冉升起的新星。1908 年 6 月，凯恩斯得到了经济学讲师的职位，而且 1909 年 3 月 16 日他那篇论述概率的专题论文的修订

版本还为他争取到了国王学院的研究员职位。现在让我们回到引发凯恩斯作出这方面的一系列探究的那个问题上来。

《论概率》的第26章（Keynes，1921：307－323）讨论了该问题，这一章名为“概率在行为方面的应用”（The Application of Probability to Conduct）。摩尔在《伦理学原理》中是按以下方式进行论证的（确切的引文请参见Keynes，1921：309）：我们应该为了创造最大量的善而行事，但我们仅仅能够计算出我们的各种行为在“最近的将来”所产生的诸多或然的效果；我们对于它们的长期后果真的是一无所知，不过，话虽如此，这些长期后果也难保不会造成一定程度的负面影响，以至于扭转我们的行为在短期内所产生的善的平衡。摩尔带着这些具有怀疑论性质的疑虑论证认为：在大多数的场合下遵循现行的道德规则是我们所能够做出的最佳选择。凯恩斯并不喜欢这一结论，因为他相信一个有理性的使徒会成员是可以自信地断定某些行为是善的，即便它们违背传统道德。凯恩斯提出这样的见解可能是由于他一直都在琢磨着同性恋行为的道德风险，尽管后来使徒会的某几位成员以此来评价充当俄国间谍的行为。凯恩斯认为摩尔的论证的错误（正如他所见）在于摩尔采纳了不正确的概率解释。他是这样说的：

> 如果善是可加的，如果我们有理由认为两个行为中的一个会比另一个在不久的将来产生更多的善，并且如果我们无法区分它们在久远的将来所导致的结果，那么，通过对无差别原则进行从已知事实来看是合法的应用，我们就可以设想有这么一个概率，它是支持前一个行为的。摩尔先生的立论肯定是建基于概率的经验或频率理论的，根据这种理论，在我们能够对某个概率作出断言之前，我们都必须确切地知道大体上将有什么事情发生（无论所发生的事情意味着什么）。
>
> （Keynes，1921：309－310）

当前的事例用到了无差别原则（the Principle of Indifference），但只是简单的应用。在这一章里，我们在后面还会对它作出更为详尽的考察。现在，让我们设想，我们正在两个行为A和B之间作抉择。在短期内A所产生的善将大于B所产生的善。关于A和B的长期后果，我们并不具有真正的知识，因而我们对于以下两个可能后果的看法是无差别的：（a）A长期所产生的善将大于B长期所产生的善，（b）B长期所产生的善将大于A长期所产生的善。鉴于这种无差别性，我们应该赋予可能后果（a）和（b）以相等的概率。于是，那种要使所期望的善最大化的欲望现在就会引导我们偏向于选择行为A。对此，一般性的结论是，我们应该实施能在短期内产生最大的善的行为，纵然这与传统道德规则相抵

触。需要指出的是，凯恩斯的论证与前文所讨论过的帕斯卡的打赌之间具有相似性，这一点很有意思，尽管凯恩斯得出了一个与帕斯卡截然相反的结论。

对于凯恩斯的论证，另一种值得一提的见解就是，年轻的凯恩斯所做的这些伦理方面的论证与他日后对投资的探讨有着相当密切的联系。我们只需把一个想知道什么行为将会产生最大量的善的有道德的人替换为一个想知道什么投资将会给他带来最大量的收益的商人，就可以看出这一点。再说，商人也仅能合理地计算出其投资的短期收益，尽管在某些情况下，长期的损失有可能大于这些收益。

我对凯恩斯关于概率的观点从中得以形成的思想背景的说明就此结束。在下一节，我将开始对这些观点本身作出清楚而细致的解释。在详细叙述这些观点的过程中，我可能会举出更多的一些关于凯恩斯的领路人——摩尔和罗素——对他的影响的例子。

第二节　作为逻辑关系的概率

在演绎逻辑中，结论是由前提衍推出来的，因而相对于那些前提，它是确定的。因此，如果我们的前提是：所有渡鸦都是黑的并且乔治是渡鸦，那么就可以确定地推演出：乔治是黑的。但现在让我们来考虑一个归纳的而非演绎的例子。假设我们的前提是这样的一个证据（记作 e）：有数千只渡鸦被观察到并且它们全都是黑的。由此可以进一步假设，我们正在考虑这样一个假说（记作 h）：所有渡鸦都是黑的，或者这样一个预测（记作 d）：下一只被观察到的渡鸦将是黑的。休谟认为 h 或 d 均不能从 e 中逻辑地推演出来，这与现代逻辑的观点是一致的。不过，纵然 e 确实不能衍推出 h 或 d，但难道我们就不可以说：e **能部分地衍推** h 或 d 吗，既然 e 无可置疑地对这两个结论给予了一定程度的支持？这种想法意味着我们有可能发展出一种关于部分衍推（partial entailment）的逻辑理论，这种理论涵盖了那种出现在演绎逻辑中的关于完全衍推（full entailment）的常规理论。这正是凯恩斯对于概率的研究进路的出发点。他写道：

> 由于我们总是假设，我们有时能够直接判定某个结论是从某个前提中推演出来的，因此，我们无须对这个假设做大幅度的推广就可以设想：我们有时能够辨识出某个结论是从某个前提中**部分地推演**出来的，或者说某个结论与某个前提之间有一种概率关系。
>
> （Keynes，1921：52）

他还写道：

事实上，我们正在主张，要正确地认识我们称之为我们的证据，并假定我们自己知道的那个命题集合与我们称之为我们的结论，并根据前者所提供的理由对其赋予或多或少的权重的另一个命题集合之间的逻辑联系……把这叫做概率关系可不是在滥用语词。

(Keynes, 1921: 5-6)

因此，概率就是部分衍推度（degree of a partial entailment）。

这种研究进路所导致的一个直接的后果就是，它使得所有概率都是有条件的。我们不能简单地谈论一个假说的概率，而只能谈论它相对于某些可以部分地衍推它的证据的概率。凯恩斯提出了如下的看法：

正如没有一个地方能在本质上“是遥远的”一样，也没有一个命题就其本身而言要么是可几的要么是不可几的；同一个陈述的概率随着所提供的证据的变化而变化，证据可以说是谈论概率的前提。

(Keynes, 1921: 7)

乍看起来这似乎与我们的概率概念的日常用法相矛盾，因为我们确实经常简单地提及某个结果的概率。凯恩斯对此的回应会是：我们在这些场合中都设定了大量被普遍接受的证据。

到目前为止，概率关系是被描述为“部分衍推度”的，但在以下文段中凯恩斯还对它作出了另一种说明：

令我们的前提由任意的一个命题集合 h 所构成，我们的结论由任意的一个命题集合 a 所构成，那么，如果关于 h 的知识能为我们对于 a 的一个程度为 α 的合理信念提供辩护，我们就说 a 与 h 之间有一种程度为 α 的**概率关系**。

(Keynes, 1921: 4)

凯恩斯在这里作了一个假定：如果 h 在 α 的程度上部分地衍推 a，那么相对于 h，在 α 的程度上相信 a，就是合理的。对于凯恩斯的做法，不那么形式化地说就是，他把“部分衍推度”等同于“合理置信度”。这个假定乍看起来好像是合理的，但它已经受到了波普尔的挑战。下面要谈的是波普尔的其中一个论点。假定我们有数量有限的证据和一个可能拥有数量无限的潜在例证的概括，比方说前文所提到的关于渡鸦的例子中的 e 和 h。现在 h 在此可以说是远远地超出了 e 的范围，因而波普尔认为，e 对 h 的部分衍推度为零。这个结论也为卡尔纳普所接

受。可是，波普尔继续论证说，尽管有限的证据对一个普遍概括的部分衍推度是零，但相对于有限的证据，我们也有可能对一个普遍概括持有非零的合理置信度。诚然，当我们对一个科学理论怀有某种有限的合理置信度的时候，这样的情况经常都会出现。因此，波普尔断定，我们不应该把部分衍推度等同于合理置信度。波普尔所接受的一种概率的逻辑解释也把概率等同于部分衍推度，但他的理论是有别于凯恩斯的，因为在其理论中部分衍推度不再是合理置信度。波普尔将合理置信度等同于他所谓的“验证度”（degree of corroboration），并因此而把他自己的立场概括如下：

> **我们可以从经验中学到越来越多的关于普遍规律的知识而不至于提高它们的概率**；……我们可以对一些普遍规律作出越来越好的检验和验证，从而提高它们的**验证度**而无须改变它们的**概率**，使其取值仍然保持为零。
>
> （Popper，1959a：383）

我在一篇文章（Gillies，1988a：192－195）中对这个论点给予了更为详尽的讨论，而现在我将继续我对凯恩斯的阐述。

关于凯恩斯的研究进路，下一个会被问到的问题可能是：我们如何获得关于这种逻辑的概率关系的知识，尤其是，概率论的公理是如何按照这种观点来设定的呢？在关于知识的一般性问题上，凯恩斯采取了罗素式的立场。罗素认为我们的一部分知识是直接地或“通过亲知”获得的。至于通过这种方式我们可以知道什么东西，他在这方面的观点是经常改变的，但这些东西的集合总是包括了我们的直接感性知觉。除此以外，我们的知识的剩余部分就是“摹状知识”，它最终是以“亲知知识”为基础的。罗素认为他的摹状词理论在分析这两类知识之间的关系方面可以发挥重要的作用。凯恩斯以罗素式的风格写道：“我们拥有关于我们自身的存在、我们自身的感觉材料、某些逻辑观念以及某些逻辑关系的直接知识，这一点通常都会得到认同。”（Keynes，1921：14）可是他随后又补充道：“某些人可能具有比其他人更强的逻辑直觉能力——这种情况的确是显而易见的。”（Keynes，1921：18）特别是，通过直接的亲知或直接的逻辑直觉，我们至少能知道一些逻辑关系。正如凯恩斯所言：“通过感知两个命题之间的逻辑关系，我们可以从关于命题 a 的知识推进到关于命题 b 的知识。借助这样的逻辑关系，我们得以获取直接的亲知。”（Keynes，1921：13）事实上，凯恩斯有时似乎认为一切逻辑关系都是通过直接的亲知而为人所知的。因此他说：“如果我们通过推论而知道了一些东西，那必定是借助结论和前提之间的某种逻辑关系通过直接的亲知而得知的。”（Keynes，1921：14）

然而，这种观点是相当极端的，因为它看上去使逻辑或概率的公理化变得多余。其实凯恩斯在讨论其他问题时也认识到了公理化的必要性。于是他写道：

> 就像我们可以直接辨识出许多其他的逻辑关系一样，我们也有可能拥有直接辨识出很多概率关系的能力，尽管如此，但某些概率关系还是比别的概率关系要容易辨识得多。概率的逻辑系统的目的在于使我们能够借助其他可被我们较为明显地辨识的关系，去了解那些不能被轻易地感知到的关系——其目的实际上就是要把含糊的知识转化为比较明确的知识。
>
> （Keynes，1921：53）

这种思路导致了凯恩斯在《论概率》的第二篇里试图构建一个形式化的概率公理系统。他说他这本书这一部分的目的在于：

> ……表明所有在关于推理和概率的基本逻辑中通常被假定为真的结论，都是以那些在第一篇里得到详细解释的基本观念为依据，从若干公理中严格地推演出来的。我认为这套公理和定理相当于逻辑学家们所谓的**思维规律**，尽管他们现在以此所指的范围要比整个形式真理系统狭窄。不过，我这套公理和定理是对那些常见的公理和定理的超越，它既涉及必然性推理的规律，同时也涉及或然性推理的规律。
>
> （Keynes，1921：133）

正如已经谈到的，在此凯恩斯研究概率的思路与罗素和怀特海研究演绎逻辑的思路是完全相同的。《数学原理》的目的在于，以那些对于逻辑直觉来说是明显正确的公理为出发点，从中演绎出一些由此被证明为逻辑有效的，但对逻辑直觉来说并不是那么立刻就能显而易见的结果。令人遗憾的是，罗素和怀特海在《数学原理》中所用到的一些公理对于很多数学家的直觉来说根本就不是明显正确的，因而正如我们将在下章看到的，当时也出现了针对凯恩斯的《论概率》的类似的批评。

对于凯恩斯而言，概率是**合理**置信度，而不仅仅是置信度。就像他所说的：

> ……在此意义上对逻辑而言重要的是，概率并非主观的。那就是说，它并不取决于人的反复多变的意向。一个命题不会因为我们认为它是或然的就成为或然的。一旦给定了决定我们的知识的事实，在这种情况下，什么是可几的或者什么是不可几的就已经被客观地确定了，而无须依赖于我们的

意见。可见，概率论是逻辑的，因为它所探讨的是在给定的条件下可以合理地怀有的置信度，而不仅仅是某个人可能合理的或者可能不合理的实际信念。

(Keynes，1921：4)

这里凯恩斯把概率说成是可以被客观地确定的，但他在此并不是以我们所定义的方式，将“客观的”用于指称物质世界中的事物。他是在柏拉图的意义上来意谓“客观的”，以此指称存在于一个据说由抽象的理念所构成的柏拉图世界里的某些东西。事实上，他甚至还认为一些就连我们全部人都将不会有能力去领悟的概率关系也有可能存在于柏拉图世界之中。他写道：“对某些概率关系的了解也许是我们中的一部分人或我们所有人力所不及的。”(Keynes，1921：18)

在他后来回忆往事的文章中，凯恩斯也确实提到，在那个时候他的团体的信仰“与新柏拉图主义存在某种关联”(Keynes，1938：438)。我们在这里可以清楚地看到 G. E. 摩尔的影响。在其《伦理学原理》中，摩尔论证说，善是一种只有通过直觉才能得知的非自然属性。凯恩斯也以同样的方式论证表明，概率是靠直觉才被认识到的逻辑关系。[②]实际上，在爱德华时代的剑桥，哲学家们所设定的柏拉图世界与柏拉图最初所描述的柏拉图世界之间存在着一个非常值得注意的相似之处。柏拉图本人的客观理念世界包含了那些分有了居于最重要地位的善的理念的伦理品质，但也包含了数学对象。由于剑桥哲学家们认为他们已经把数学还原为了逻辑，所以他们的柏拉图世界不仅包含了诸如“善”这样的伦理品质，而且包含了逻辑关系。这些相似之处也许反映了他们的思想的社会基础的相似性。柏拉图及其圈子是一个由富裕的知识分子组成的精英团体，他们在以英雄阿卡德摩斯（Academus）命名的小树林里探讨哲学，那儿离大的商业城市雅典不是很远。使徒会也是一个由富裕的知识分子组成的精英团体，他们在剑桥的舒适环境中讨论哲学，而剑桥离大的商业城市伦敦也不算太远。

第三节　可测度的与不可测度的概率：无差别原则

通常在涉及概率的数学论述中，任何概率都被看做在区间［0，1］内具有一个确定的数值。然而，凯恩斯并不认为所有概率都有一个数值；恰恰相反，他认为某些概率甚至是不可相互比较的。凯恩斯是这样说的：

……运用实际的判断力不可能确实地赋予每个论据的概率以一个数值。我们根本就不能测度它们，甚至也不确切地知道我们是否总是能够把它们排

列在一个量级上。从来都没有人提出过任何用以评价它们的理论规则。

(Keynes, 1921: 27-28)

因此，就算我们只有两个概率，也有可能出现多种情况。一是，它们可能都具有一个数值。二是，尽管我们也许不能给它们都指派一个数值，但我们或许能够说其中的一个要比另一个大。三是，我们甚至不能对它们作出任何比较。正如凯恩斯所说：

那么，以下我所坚称的是：就某些概率对子而言，要对对子中的两个概率的量度作出比较是不可能的；不过，在某些概率关系的对子中，我们还是可以说，一个概率关系更大一些而另一个则稍小一些，尽管我们不可能测度它们之间的差量；而只有在一种非常特殊的情况下（我稍后会有所论述），对概率的量度作数值上的比较才算得上是有意义的。

(Keynes, 1921: 34)

可见，全体概率并不是按线性排列的。而图 3.1 则展示了全体概率的一种特殊的局部排布。

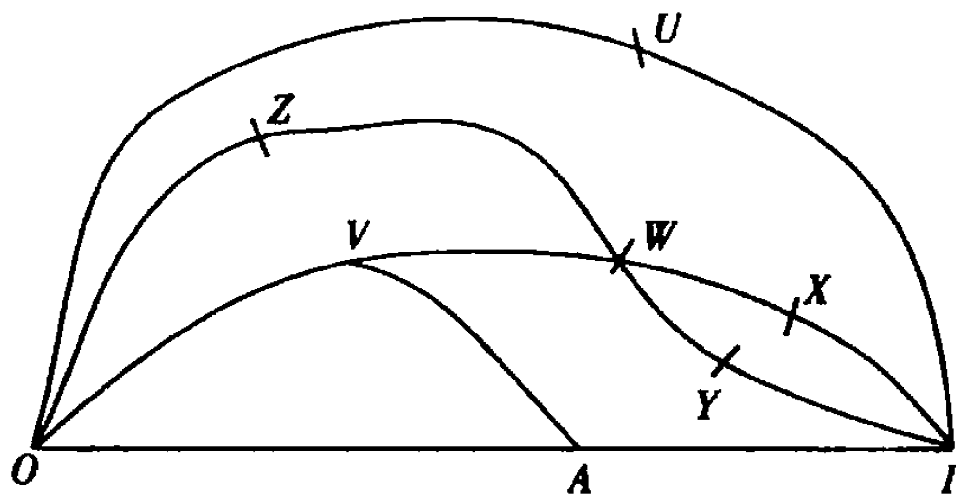


图 3.1　凯恩斯的逻辑理论中的全体概率的局部排布（Keynes, 1921: 39）

凯恩斯对图 3.1 所展示的内容作了如下评述：

O 代表不可能性，*I* 代表确定性，*A* 则是一个介乎 *O* 和 *I* 之间在数值上可测度的概率；而 *U*, *V*, *W*, *X*, *Y*, *Z* 都是非数值概率，其中 *V* 既小于数值概率 *A*，也小于 *W*, *X* 与 *Y*。*X* 和 *Y* 不仅大于 *W*，而且大于 *V*，但它们相互之间以及与 *A* 之间都是不可比较的。*V* 和 *Z* 比 *W*, *X* 与 *Y* 都要小，不过彼此间却是不可比较的；*U* 与概率 *V*, *W*, *X*, *Y*, *Z* 中的任何一个都是不可比

较的。

(Keynes, 1921: 39)

对概率间的这种颇为复杂的结构，人们的态度存在着相当大的分歧。德·菲耐蒂认为凯恩斯的非数值概率令人遗憾地与简单性以及数学概率论的发展动力背道而驰。他写道：

……在凯恩斯看来，还存在着……不能用数字来表示的概率。

凯恩斯的立场确实不适合于数学概率论的发展，也几乎不能与概率的直觉观念相协调……

……基于原则，我本人认为凯恩斯的立场是不可接受的（更何况只要采纳主观主义的观点，他心中的疑虑就会消除）。

(de Finetti, 1938: 359)

另一方面，伦德（J. Runde）认为凯恩斯研究概率的定性方法在很多情况下要比数值方法更为现实。实际上，伦德论证表明，我们能够保留凯恩斯关于概率的非数值理论而摒弃凯恩斯的柏拉图主义及其依赖直觉的做法。(参见 Runde, 1994)

那么，在什么情况下可以给概率指派数值呢？对此，凯恩斯毫不含糊地回答说："为了使数值测度成为可能，我们必须得到若干具有相等概率的备选对象。"(Keynes, 1921: 41) 他甚至还声称这一点是所有概率论家都同意的："人们向来认为对数值的测度确实要在那些情况下进行，因为只有那样，才得以化归出一组互斥且穷举的等概的备选对象。"(Keynes, 1921: 65)

因此，为了得到以数字表示的概率，我们必须能够断定若干事件是等概的，而为了让我们能够做出这样的判断，我们又需要一个先验的原则。这个先验的原则被凯恩斯称为无差别原则。这个称谓是他首创的，但他说该原则本身是由 J. 伯努利以不充分理由原则（Principle of Non-sufficient Reason）的名称最先引入的。凯恩斯对这个原则作出了以下的初步说明：

无差别原则宣称，如果没有已知的理由对我们所讨论的主题中的一个备选对象做出比其他备选对象更强的断言，那么，相对于这样的知识，关于每一个备选对象的断言都有着相等的概率。

(Keynes, 1921: 42)

令人遗憾的是，无差别原则导致了一些悖论，我们将会在下一节对其中的几个作

出探讨。然而，在细察那些反对这个原则的理由之前，看看它如何被用到贝叶斯进路上，会是很有意思的。这也可以被视为对贝叶斯主义的一个简要的介绍，因为这是一个我们在随后的章节中会时不时地谈到的理论。我们以下的概述所要说明的是逻辑类型的贝叶斯主义。不过，如今更为受欢迎的却是主观贝叶斯主义，所以我们在下章对概率的主观理论作出考察时，会清楚地阐明逻辑贝叶斯主义和主观贝叶斯主义之间的差异。

现在让我们再回过头来讨论我们那个关于渡鸦的简单例子。令 h 为“所有渡鸦都是黑的”这个假设。再令 e_1 = 第一只被观察到的渡鸦是黑的，……，e_n = 第 n 只被观察到的渡鸦是黑的，并且 e（我们的证据）$= e_1 \& e_2 \& \cdots \& e_n$。$h$ 并不是从 e 中逻辑地推演出来的，可是，如果我们接受概率的逻辑解释，那说 e 在一定程度上使得 h 是或然的，则是合乎情理的。h 相对于 e 的条件概率写作 $P(h \mid e)$。贝叶斯学派的目的是要找出计算 $P(h \mid e)$ 的那些方法。贝叶斯主义者们认为这会为出现于科学和日常生活中的从证据到假说的归纳推理提供一个基础。

根据公理 3（我在下章才对它作正式的介绍），

$$P(h \mid e) = \frac{P(e \& h)}{P(e)}, \text{仅当} P(e) \neq 0 \tag{3.1}$$

由此可推出：在相同的条件下，

$$P(h \mid e) = \frac{P(e \mid h)P(h)}{P(e)} \tag{3.2}$$

这是贝叶斯定理的简化形式。值得说明的是它的各个组成部分：

$P(h \mid e)$ 被称为 h 相对于 e 的验后概率（posterior probability）；

$P(e \mid h)$ 被称为似然性（likelihood）；

$P(h)$ 是 h 的验前概率（prior probability）；

$P(e)$ 是 e 的验前概率。

贝叶斯推理的目的在于，根据经验，运用贝叶斯定理从假说 h 的验前概率推算出它的验后概率。从 $P(h)$ 到 $P(h \mid e)$ 的转变被称为**贝叶斯条件化**。在贝叶斯主义的逻辑版本中，这个转变过程涉及我现在将要说明的无差别原则的应用。

为了计算 $P(h \mid e)$，我们必须对式（3.2）等号右边的所有要素进行估算。似然性在许多情况下都不难计算。事实上，若 e 是从 h 中逻辑地推演出来的，则

$P(e|h)=1$。如果 h 是一个统计假说，通常经过简单的概率计算，就可求得 $P(e|h)$。因此，如果我们能够估算出 $P(h)$ 和 $P(e)$，我们也就能计算出 $P(h|e)$。但怎样才能做到这一点呢？

以下是其中的一个方法。假设我们有 m 个可能存在的互斥假说 h_1，h_2，…，h_m（比方说，在这个例子中，这些假说就是给渡鸦指定各种不同的颜色），并且 $h=h_1$；再进一步假设我们不具有使自己偏爱 h_i 而非 h_j 的先验的理由（其中 $i\neq j$）。这样，借助无差别原则

$$P(h_1)=P(h_2)=\cdots=P(h_m)=1/m$$

此外，根据概率演算的一个定理

$$P(e)=\sum_{i=1}^{m}P(e|h_i)P(h_i)$$

于是，通过替换，我们得到

$$P(h|e)=\frac{P(e|h)}{\sum_{i=1}^{m}P(e|h_i)}$$

可见，如果我们能够估算出相关的似然性（似然性正如我们所谈到的那样，在许多情况下都很容易估算），我们就可以计算出 $P(h|e)$。以这种方式，逻辑贝叶斯主义者们希望能计算出相对于证据人们对假说的合理置信度，或者说，就像他们有时所说的那样，希望能构造出一个归纳逻辑。这是一个有吸引力的方案，但它要依赖于无差别原则的运用，而我们将在下节看到，无差别原则的运用面临着重重困难。

第四节　无差别原则悖论

无差别原则的麻烦在于它引起了若干悖论。这些矛盾为人所发现已经有相当长的一段时期了。最早被发现的似乎是投针问题（the needle problem），布丰（G. L. L. de Buffon）在1733年发表了他对这个问题的看法。[③]更多的悖论陆续被一些著述者公之于世，这些著述者中尤为值得一提的两位是贝特朗（J. Bertrand，

1889）和博雷尔（E. Borel，1909）。[3]尽管凯恩斯拥护无差别原则，但他在其专著（Keynes，1921：Chapter IV）中对由它所引起的悖论给予了最为出色的说明，非常值得钦佩。在这一节，我将介绍三个悖论，而且会对后两个作概括性的论述。接着在下一节，我将细察解决这些悖论的尝试，并在讨论的过程中再介绍另一个悖论。

首先要讨论的悖论叫做书悖论。试想有一本书放在某个图书馆里的一个指定的地方。让我们假设我们从来没有去过那个图书馆或看过一本同样的书。因此，对于它的封面是什么颜色，我们是一无所知的。在此情况下可以认为，我们既没有理由推测其封面是红的，也没有理由推测它不是红的。这样一来，通过使用无差别原则，我们得到 $P(红)=1/2$。同理，$P(蓝)$、$P(绿)$ 与 $P(黄)$ 全为 1/2，从而与“互斥事件的概率之和小于或等于 1”这条概率演算规则发生矛盾。也许书悖论并不十分难以解决，但对它的讨论会导致一些有意思的想法，出于这个原因，我们也把它归入考察之列。现在让我们转到一个较为棘手的个案。这就是酒－水悖论。

假设我们有一瓶酒和水的混合液，我们知道其中一种液体的分量至多是另一种的 3 倍，但对该混合液的其他信息一概不知。由此我们可以确定

$$1/3 \leqslant 酒/水 \leqslant 3$$

而且根据无差别原则，酒对水的比例在区间［1/3，3］之内有一个均匀的概率密度。因此，

$$P(酒/水 \leqslant 2)=\frac{2-\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}}=\frac{5}{8}$$

同理，

$$1/3 \leqslant 水/酒 \leqslant 3$$

而且根据无差别原则，水对酒的比例在区间［1/3，3］之内有一个均匀的概率密度。因此，

$$P(\text{水/酒} \geqslant \frac{1}{2}) = \frac{3-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{3}} = \frac{15}{16}$$

但“酒/水≤2”与“水/酒≥1/2”是两个相同的事件，而无差别原则却赋予它们不同的概率。

我们要提到的无差别原则悖论的第三个例子属于几何概率悖论，这类悖论之所以得此称谓，是由于它们涉及各种几何图形的概率的计算。目前的这个例子是贝特朗在 1889 年刊布的。试想有一个确定的圆，现要随机地挑选它的一条弦，那么，请问这条随机弦的长度大于该圆的内接等边三角形的边长的概率是多少？为了方便起见，可将这个概率缩写为 P(CLSE)(= the probability that the chord is longer than the side of the equilateral triangle inscribed in the circle)。在此，我们能够以三种似真的方式应用无差别原则，使得这一概率有三个不同的值。让我们先来考察等边三角形 XYZ，它内接于以 O 为圆心的圆上，这个圆的半径被设定为 R（图 3.2）。

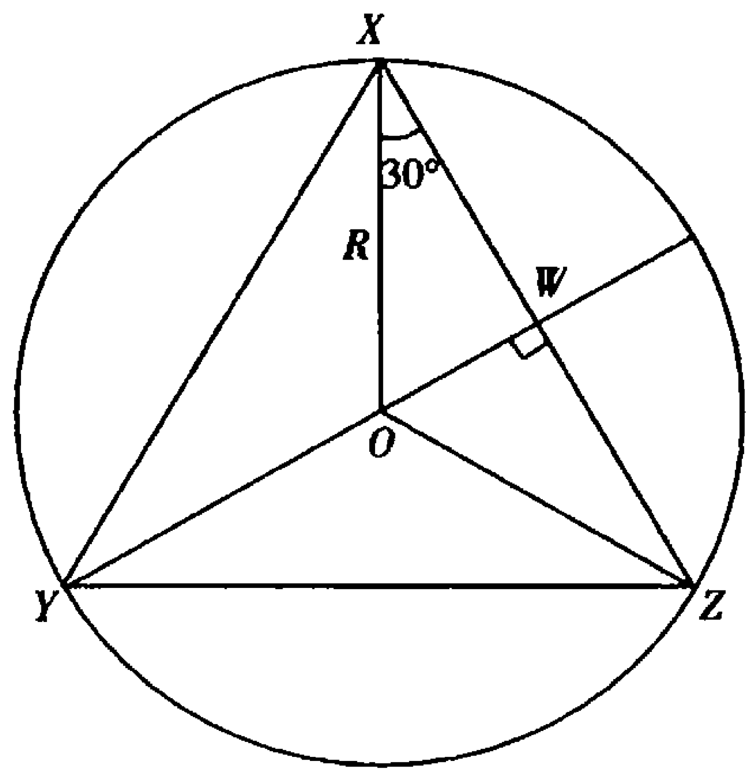


图 3.2　一个内接于以 O 为圆心、R 为半径的圆上的等边三角形

延长 YO 与 XZ 相交于 W，从而使得，OWZ 成为一个直角三角形，并且 $XW = WZ$。此外，这还使得 $OW = R\sin 30° = R/2$。于是我们现在就可以依据这些几何学事实来给出我们的第一种计算（图 3.3）。

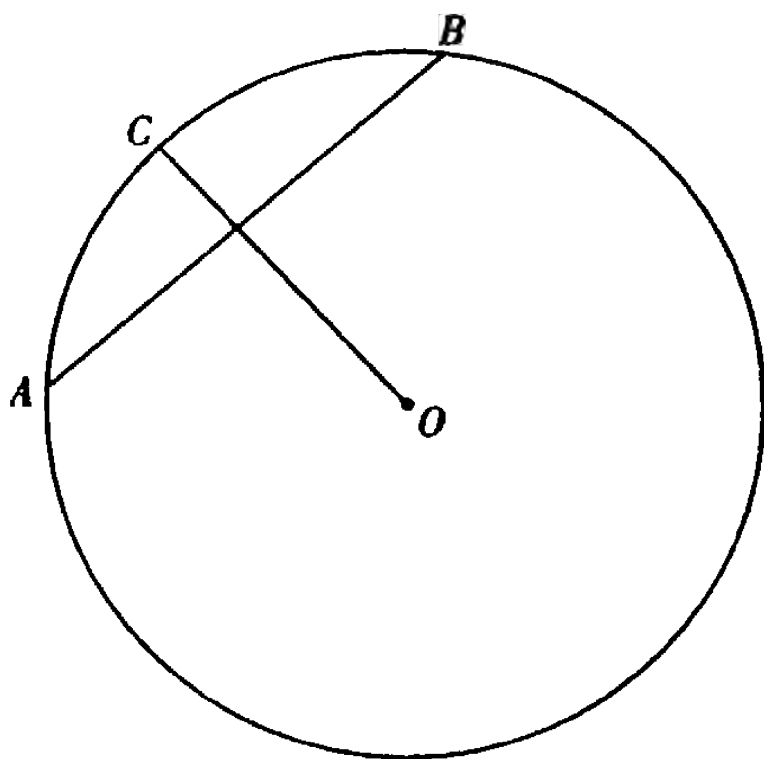


图 3.3　P(CLSE) 的第一种计算

令 AB 为我们的随机弦。从 O 出发作 AB 的垂直线 OW，并与圆相交于 C。若 $OW<R/2$，则 AB 的长度大于内接等边三角形的边长。可是，我们并没有理由设定 W 在 OC 的某一点而非其他点上。于是，根据无差别原则，OW 的长度在区间 [0，R] 之内有一个均匀的概率密度。因此，

$$P(\mathrm{CLSE})=P\left(OW<\frac{R}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

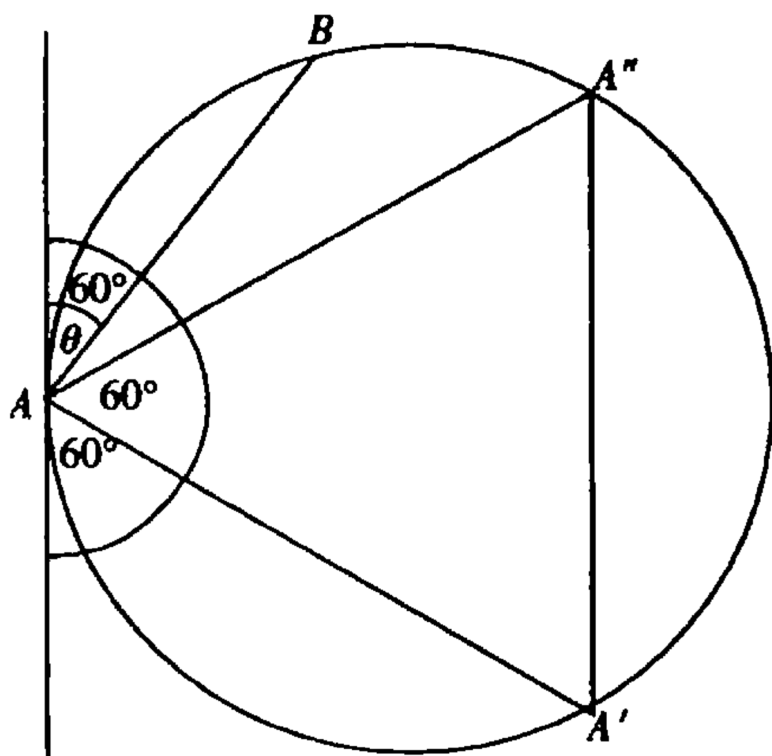


图 3.4　P(CLSE) 的第二种计算

让我们转到图 3.4，开始下一种计算。

再次以 AB 代表随机弦。令 $AA'A''$ 为那个内接等边三角形，A 是它其中的一个

顶点。作切线与圆相交于A，令θ为该切线与AB之间的夹角。这样，若$60° < \theta < 120°$，则AB的长度大于内接等边三角形的边长。因为我们没有理由设定θ的度数是0°到180°之间的某一个值而非其他值，所以根据无差别原则，θ在区间[0°，180°]之内有一个均匀的概率分布。因此，

$$P(\text{CLSE}) = P(60° < \theta < 120°) = \frac{1}{3}$$

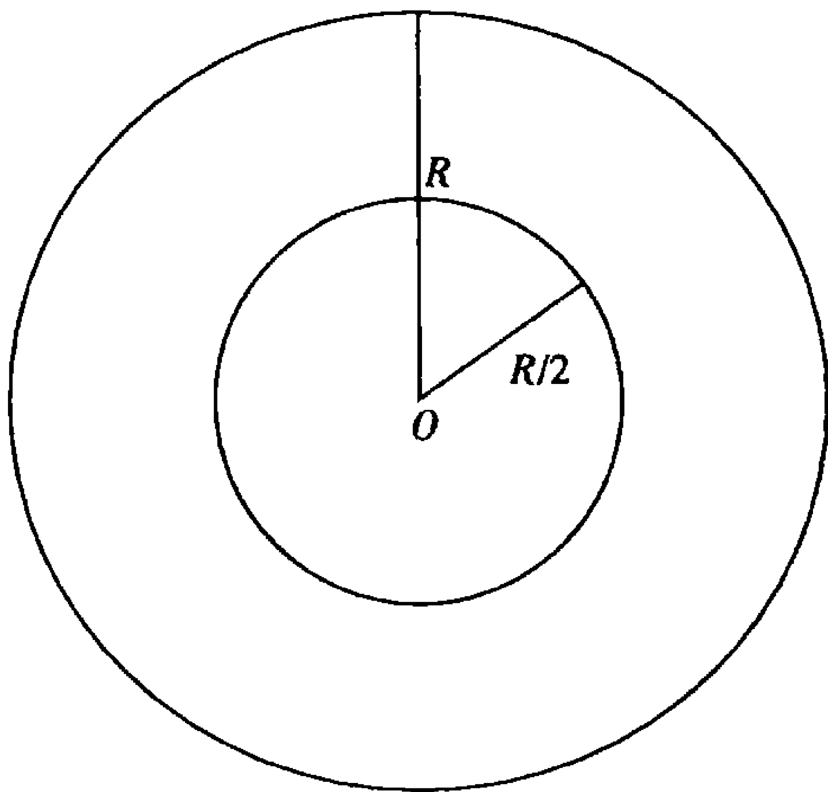


图 3.5　P(CLSE) 的第三种计算

若想了解第三种计算，请考虑图 3.5。

在此，我们在我们的主圆里面画一个同样以O为圆心的小圆，小圆的半径是主圆的一半，即$R/2$。如果主圆的随机弦AB的中点W处于小圆之内，那么它的长度要大于主圆的内接等边三角形的边长。因为我们没有理由设定W处于主圆内的某一点而非其他点上，所以根据无差别原则，W在主圆内有一个均匀的概率密度。因此，

$$P(\text{CLSE}) = \frac{\text{小圆的面积}}{\text{主圆的面积}} = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

这是一个巧妙的例子，因为运用无差别原则的三种计算接连赋予P(CLSE)的值竟然分别是1/2，1/3和1/4。

我们能够从后两个例子中概括出一般规律，从而构造出一个悖论，使得该悖论在任何场合下都会涉及一个在某一区间[a，b]内取值的连续参数（比方说

θ)。要看出这一点其实并不难。我们所必须做的就是考察 $\phi=f(\theta)$。f 在区间 [a, b] 上有定义，既是一个连续函数，也是一个合乎要求的正则函数，因此，$a\leqslant\theta\leqslant b$ 逻辑地等值于 $f(a)\leqslant\phi\leqslant f(b)$。如果我们没有理由设定 θ 在区间 [a, b] 内的某一点而非其他点上，那么我们就可以运用无差别原则，在 [a, b] 内赋予 θ 一个均匀的概率密度。然而，相应地，我们也没有理由设定 ϕ 在区间 [$f(a)$, $f(b)$] 内的某一点而非其他点上。由此看来，我们可以同样令人满意地运用无差别原则，在 [$f(a)$, $f(b)$] 内赋予 ϕ 一个均匀的概率密度。可是，一般而论，以 θ 有一个均匀的概率密度为基础的概率并不等同于以 ϕ 有一个均匀的概率密度为基础的概率；于是无差别原则便因此而导致矛盾。酒－水悖论是反映这种矛盾的一个简单的例子，因为如果我们令 θ = 酒/水，那么悖论就会在对 $\phi=f(\theta)=1/\theta$ 展开考察的过程中产生。我对无差别原则悖论的说明到此结束。接下来让我们仔细看一看解决它们的多种尝试。

第五节　用以解决悖论的可能方案

让我们从书悖论的解决方案谈起。前文的论述表明，由于我们既没有理由设定那本书的封面是红的，也没有理由设定那本书的封面不是红的，因而根据无差别原则 P(红) = 1/2。然而，这个推论所使用的前提是值得高度怀疑的。作为一个备选对象，“非红的”可被分为“蓝的”和“非（红的或蓝的）”，而且“蓝的”也能以同样的方式被划分。因此，对备选对象“红的”和“非红的”应用无差别原则是不恰当的。事实上，备选对象“非红的”比备选对象“红的”具有更大的或然性，这似乎是显而易见的。以下是一个类似的例子，但看来无差别原则在其中的确是适用的。[④]假定我们正在考虑一辆汽车的颜色，对于这辆车我们只知道它的生产年份和型号。从一份产品目录中，我们得知厂家当年所生产的那种型号的汽车有七种不同的颜色。在这种情况下，使用无差别原则去赋予这些颜色中的每一种以 1/7 的概率，看上去确实是合理的。

现在我们可以对这个例子作出概括，以此说明凯恩斯试图用以解决悖论的方式。他的想法是，我们应该仅仅把无差别原则运用于这样的场合，即在其中诸备选对象是数目有限的并且是“不可分的”（indivisible）。他这样说道：

> 令 $\phi(a_1)$，$\phi(a_2)$，…，$\phi(a_r)$ 为我们试图借助无差别原则使其等概性得以确立的诸备选对象，h 为证据。这样，应用无差别原则的一个必要条件是：相对于证据，具有 $\phi(x)$ 形式的备选对象应当是**不可分的**。
>
> （Keynes，1921：60）

在书悖论中，我们不可以应用无差别原则，因为正如我们所见，其中的一个备选对象，即“非红的”可被分成与另一个备选对象（红的）形式相同的多个子备选对象。然而，在那个关于汽车的例子中，具有“一辆属于那个年份和型号的汽车可能有的颜色”这种形式的备选对象全都是不可分的，因此无差别原则能被合法地运用。

这个建议所带来的麻烦在于，它似乎排除了把无差别原则应用于任何连续性场合的可能性。在这些场合中，如果说某参数 θ 位于某区间 $[a, b]$ 内的某处，那么以下两种可能情况必有其一：一是，θ 被认为具有无数个值；二是，若我们把该区间分为数目有限的子区间，则这些子区间总是可以被分为若干更小的子区间。凯恩斯对无差别原则的修改看来妨碍了它被用于这两种情况中的任何一种；但凯恩斯本人却认为该原则可以在第二种情况下得到合法的应用。他写道：

> 例如，假定一个点在一条长度为 $m \cdot l$ 的直线上，备选对象是“当我们沿着那条直线从左向右移动一个点时，那个点位于长度为 l 的区间是第 x 个有那样的长度的区间”，我们把它记为 $\phi(x)$；那么，无差别原则能够可靠地被应用于这 m 个备选对象，即 $\phi(1)$，$\phi(2)$，…，$\phi(m)$，备选对象的数目 m 将随着区间的长度 l 的减小而增多。我们没有理由说，l 不应当成为一个确定的长度，无论它如何小。
>
> （Keynes，1921：62）

凯恩斯的步骤在此看上去明显让人心生疑虑。首先要指出的是，他规定具有那种形式的备选对象的长度 l 要有一个确定的值。然而，想必不同长度的子区间在本质上也是具有相同形式的。再说，尽管作了这样的规定，他却允许各子区间的长度变小，而且允许我们可以按自己的意愿把它们缩小。更为严重的是，这种思路似乎不能避免酒-水悖论。假设在那个例子里我们把区间 $[1/3, 3]$ 分为 n 个相等的子区间 I_1，…，I_n。现在来考虑事件E，即酒的分量小于水的分量的两倍。在这样的情况下，只要先把E刻画为具有“酒/水”（酒/水 $\in I_j$）形式的事件的组合，接着再把它刻画为具有“水/酒”（水/酒 $\in I_k$）形式的事件的组合，那么，无论 I_i 的长度被认为有多么的小，我们通过适当地修改先前的论证还是可以使E得到两个不同的概率。

我断定凯恩斯对无差别原则的修改会使之无法适用于连续性场合。这对于他的概率的逻辑理论是一个沉重的——或许就其本质而言是致命的——打击，因为数学概率论的很多最为重要的应用都会涉及具有连续参数的数值概率。关于概率的哲学论述若把这样的场合排除在外，则绝对不能被认为是恰当的。此外，确定

无疑的是，即便对于某些悖论，它们产生于存在着有限个离散的备选对象的简单场合，凯恩斯的修改还是不能恰当地处理它们。为了说明这一点，我会讲述这样的一个悖论，它在概率论发展史上起过重要的作用。

事实上，在他提出贝叶斯主义的那篇文章里，贝叶斯（Thomas Bayes）在某个地方就不明言地运用了无差别原则。贝叶斯对他那篇著名的文章是存有疑虑的，因此它直到贝叶斯死后才被他的朋友普赖斯公开发表。由于普赖斯为这篇文章增加了一个重要的引言和附录，所以在我看来，把它视为一篇合著的文章是公平合理的，因而我会称之为"Bayes and Price，1763"。在以下摘引自普赖斯的引言的文段中，他谈到了贝叶斯本人对自己的文章的疑虑：

> 但他（贝叶斯——引者注）后来认为，他曾对其作过论证的那个假定不一定在所有人看来都是合理的；因而他选择以另一种方式来阐述那个他认为对问题的解答已包含于其中的命题，并在附注中补述了他之所以这样认为的理由，而不是把任何尚有争议余地的东西都容纳到他的数学推理中去。你将会注意到，这正是他在这篇文章中所追求的方法。
>
> （Bayes and Price，1763：134）

贝叶斯实际是以考察一个具体的例子，即他的台球桌例子作为开始的。他对这个例子的数学分析非常到位，以至于无论是贝叶斯主义者还是非贝叶斯主义者都同样会接受它。[5]可当他从这个具体的例子推广到一般性的场合时，麻烦也随之而来。这里所谓的一般性场合是，对于一个事件M，我们只知道它在一次特定的试验中可能出现也可能不出现，其余的信息我们一概不知。贝叶斯在其附注中论证说，他从台球桌的例子中所抽引出的规则也同样适用于这样的一个事件，而他的论证就暗含了对无差别原则的运用。

> 此外，这种看法——即如果我们在进行有关一个事件的任何试验之前，对它的概率绝对是一无所知的，那么在这种场合中使用同样的规则就是合理的做法——似乎来源于以下的考虑：对于这样的一个事件，我没有理由认为，在一定数目的试验中，它出现的次数应该是某一可能的数目而非其他可能的数目。正是基于这一考虑，所以我可以有根据地对它进行推理，就好像它的概率在开始时并不确定，然后才按以下方式被决定：我没有理由认为，在一定数目的试验中，它出现的次数应该是某一可能的数目而非其他可能的数目。事件M的情况正好就是这样。
>
> （Bayes and Price，1763：134）

贝叶斯当时正在考虑一个事件 M，对于这个事件，我们仅仅知道它在若干次（比方说 n 次）试验中的每一次可能出现也可能不出现。他认为，没有理由可以假定，在这些试验中，该事件出现的次数将会是某一可能的数目，比方说 r，而不是其他可能的数目，比方说 s（在此处 $0 \leqslant r \neq s \leqslant n$）。接下来，他不明言地使用了无差别原则，给这些可能的结果每一个都指派相等的概率，因而得到

$$P(\text{M 在 } n \text{ 次试验中正好出现了 } r \text{ 次}) = \frac{1}{(n+1)}$$

这样，我们便看到贝叶斯把无差别原则运用到了成功事例（事件 M 的出现）的数目上。然而，爱德华兹（A. W. F. Edwards）在他对托马斯·贝叶斯的若干论点的评注中指出，我们可以同样有理由地把无差别原则运用到由成功事例和失败事例构成的可能序列上，而在那种情况下，我们会得到一个不一样的结果。（参见 Edwards，1978：118）。

为了比较无差别原则的两种不同的应用所得的结果，让我们把一个成功事例（M 的一次出现）记作 1，一个失败事例记作 0，并考虑 $n=2$ 的情况。于是，我们有四个由成功事例和失败事例构成的可能序列，即 00，01，10，11。运用爱德华兹的方法可对每个序列指派 1/4 的概率。如果我们以 P 表示这种概率分布，则我们有 $P(01 \text{ 或 } 10)=1/2$。若运用贝叶斯的方法，成功事例的可能数目就有三种，即 0，1 或 2，因而可对它们每一个指派 1/3 的概率。如果我们以 P^* 表示这种概率分布，则我们有 $P^*(01 \text{ 或 } 10)=1/3$。这样，我们在此便得到了一个典型的无差别原则悖论，但我们在这里所涉及的并非连续性场合，而是一个较为简单的场合，其中存在着有限个离散的备选对象。再说，这个例子并不是任意提出的，对于对归纳推理的分析，它是非常重要的。那就让我们来考察一下凯恩斯对无差别原则所建议的修改能否处理这个问题。

凯恩斯的“不可分的形式相同的备选对象”这一概念并不完全精确，因而似乎有两种方式可以把它运用到该例子上。一方面，我们可以说成功事例的可能序列和可能数目都是些不可分的备选对象，尽管它们属于不同的类型。这便认可了 P 和 P^* 都是有效的。另一方面，我们也可以认为贝叶斯所考虑的那些备选对象并不是真的可分的。例如，在两次试验中，“一个成功事例”这个备选对象实际上可分为两个子备选对象，即 01 和 10。如果我们顺着这种思路想，那么 P 就是有效的，而 P^* 则是无效的。然而，根据凯恩斯的思路所作的这两种应用都不是令人满意的。第一种既认同 P 也认同 P^*，因而根本就解决不了悖论。第二种排除了 P^*，但事实上却存在着非常好的理由能解释为什么贝叶斯想采纳 P^* 而排

除 P。现在我就要说明这些理由，它们将表明，凯恩斯的方法的第二种应用方式令人遗憾地排除了从归纳逻辑的观点来看是正确的选项。

这里的关键之处在于，如果我们采纳 P，那么，借助贝叶斯条件化从经验中学习就会变得不可能了。为了看清这一点，让我们再次考虑式 3.1，亦即

$$P(h \mid e) = \frac{P(e \,\&\, h)}{P(e)}, \text{仅当 } P(e) \neq 0$$

在此，令 e 代表前 n 次试验的结果，h 代表假设：M 在第 $n+1$ 次试验中出现。$P(h)=1/2$。h 的验后概率现在可以通过上述公式计算出来。在 n 次试验中，由成功事例和失败事例构成的可能序列有 2^n 个。e 是这些序列中的特定一个，从而 $P(e)=2^{-n}$。同理，$P(e\&h)=2^{-(n+1)}$。因此，

$$P(h \mid e) = \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

由于验后概率与验前概率相同，因而在贝叶斯框架内没能做到从经验中学习。

可见，贝叶斯选择 P^* 而非 P 是明智之举，而且以后也有贝叶斯主义者做过类似的选择。例如，卡尔纳普（Carnap，1950）曾对两个认证函项（confirmation function）c^+ 和 c^* 进行过考察。对他的状态描述赋予相等的概率可得到 c^+，而对他的结构描述赋予相等的概率则可得到 c^*。可以说，这两个函项在卡尔纳普的系统中类似于我们的 P 和 P^*。卡尔纳普（Carnap，1950：562－565）有这样的看法：如果我们采纳 c^+，那么从经验中学习就会变得不可能，因而我们支持 c^*。尽管这是相当合理的，但它同时也是特设性的。就无差别原则而言，即便加上凯恩斯的修改，似乎也没有任何理由认为 P^* 比 P 更可取。恰恰相反，凯恩斯的方法意味着——如果非说不可的话——我们应该选择 P 而不是 P^*。因此，我仅仅可以断定的是，凯恩斯未能给出一个解决无差别原则悖论的令人满意的方案。

接下来让我们细察另外一些消除悖论的方法，它们与凯恩斯的有所不同。我们已经看到，有一类悖论之所以能在连续性场合中产生，是因为我们在把某一参数 θ 变换为另一参数 $\phi=f(\theta)$ 之后，再将无差别原则分别应用于 θ 和 ϕ，从而导致了不同的结果。在某些场合下，要想限制这样的变换步骤，可以通过论证表明：一个特定的参数对于相关问题来说是自然的（natural），若把它变换为另一参数反而会显得古怪和不自然（artificial）。因此，例如说，如果那个参数是高度（h），从逻辑上讲，可以使用 $g=1/h$ 作为替代，但这样的一种步骤起码可以说是罕见的。h 的值由测量程序直接给定，但在广大的变化幅度内会有一个恒定误差（比方说 ε），因而测量的结果应为 $h\pm\varepsilon$。如果用 $g=1/h$ 代替 h，必然会改变

从测量程序直接得到的结果，再加上误差，相关结果大约变为 $g \pm \varepsilon g^2$。换句话说，误差的量值会随着 g 的大小的变化而变化，这真是一点也不方便。由此可以表明，考虑诸如 $1/h$ 这样的经过变换的参数简直就是不恰当的，所以在一个与高度有关的问题中，无差别原则能被合法地用于 h，但不能被用于由 h 变换所得的参数。我对这种方法表示同情，虽然它确实能够处理一些悖论，可是它和人们所提出的那么多的解决方案一样，不能处理所有的悖论。例如，在酒 - 水悖论中，被考察的两个参数，即酒/水和水/酒都是相当对称的而且也同样显得自然。因此，这个悖论不能以刚才所提到的方式来解决。

杰恩斯（E. T. Jaynes）曾就我们的第三个悖论，即关于一个圆的随机弦的几何悖论写过一篇有意思的文章（Jaynes，1973）。极不寻常的是，他认为那三个解决方案中有一个是正确的而其余两个则是错误的。他所捍卫的解决方案是第一个，即 $P(\mathrm{CLSE}) = 1/2$。杰恩斯认为，那个问题的解决方案应当满足某些不变性原则。特别是，如果我们要求该解决方案应该具有旋转不变性、尺度不变性与平移不变性，那么这就排除了后两种方案而留下了第一种作为唯一可能的方案。利用第一个方案所满足的那些原则，他计算出了那条弦的长度的全部概率分布。随后他又和查尔斯 · E. 泰勒（Charles E. Tyler）博士进行了一个实验，这个实验是在地板上画一个直径为 5 英寸的圆，然后从其上的一个固定点随机地抛掷扫帚头的麦秆细枝。129 次成功抛掷的结果“以极低的卡方值”认证了他的计算分布（Jaynes，1973：487）。我对这个巧妙的方案的回应与先前的意见一样。诉诸不变性原则无疑能够以一种合理的方式来解决一些无差别原则悖论。杰恩斯的文章确切地表明了情况就是这样。然而，不变性原则不能解决所有的悖论。尤其是，它们不能处理酒 - 水悖论，因为对于不变性而言，酒/水和水/酒这两个参数之间没有什么区别。杰恩斯（Jaynes，1973：490）本人也已经指出了这一点。

不过，杰恩斯倒是有一个十分有意思的一般性论点，用以支持无差别原则。他的观点是，这个原则在物理学上的应用经常取得极大的成功，因而不能被认为完全没有价值。对此，他举了关于气体黏滞性的例子来作出说明：

> 例如，在给定一种气体的平均粒子密度和总能量的情况下，预测它的黏滞性。显然，对这个问题的回答取决于分子的空间和速度的精确分布（事实上，它极为取决于位移 - 速度相关性），但给定的数据资料看来一点也没有告诉我们应该假定哪种分布为真。然而，在无差别原则的指引下，物理学家们已经作出了明确的选择，而且他们也已经为我们正确地作出了对黏滞性以及许多其他物理现象的并非无足轻重的预测。
>
> （Jaynes，1973：478 - 479）

另一个例子说的是从玻尔兹曼统计法（Boltzmann statistics）向玻色－爱因斯坦统计法（Bose-Einstein statistics）的转变。这个例子之所以有意思，是因为它类似于那个关于 P 与 P^* 相比较的问题，而该问题的出现则与贝叶斯推理有关。在这里我会对有关论证作一个非正式的概述。[⑥]随着普朗克（M. K. Planck）和爱因斯坦（A. Einstein）的光的量子理论的发展，一个问题也由此产生。在这种理论中，空腔辐射可与某种气体中的一团分子相类比。当时人们运用玻尔兹曼统计法已经解决了关于气体分子的问题，但相同的方法似乎不能被用到光量子上，因而有必要进行一些修改，这些修改需要把量子理论中所涉及的不同情况考虑在内。由玻色（S. Bose）引入并经爱因斯坦改进的新颖的“量子统计法”就特别作了这方面的考虑。这些玻色－爱因斯坦统计量背后的思想是，尽管用于计算玻尔兹曼统计量的经典粒子是被假定为相互间可分辨的，但光量子应当被视为相互间是不可分辨的。请考虑两个粒子，比方说 a 和 b，并假设每个粒子可能具有或可能不具有某种性质 M。若粒子有 M，我们记作 1；若无 M，我们记作 0。这样，在经典场合中，如果先写 a 后写 b，则会出现四种可能的情况，即 00，01，10 和 11，它们在玻尔兹曼统计法中被指派了相等的概率。然而，如果这两个粒子是不可分辨的，那么我们便不能在 01 和 10 之间作出区分，因为这两种情况融合成了一种单一的情况。于是，我们有三种可能的情况，它们在玻色－爱因斯坦统计法中被赋予相等的概率。因此，玻尔兹曼统计法和玻色－爱因斯坦统计法便以大致相同的方式与出现在贝叶斯推理的场合中的 P 和 P^* 相关联。不过，这两种场合之间还是存在着一个重大的差异。在贝叶斯推理方面，取 P^* 而舍 P 在本质上是出于特设性的理由，因为这个选择符合“从经验中学习”的要求，产生了令人满意的结果。然而，在物理学方面，在用光的量子理论对空腔辐射所作的分析中，则有一个有力的理由——即“光量子间的不可分辨性”这一论点——推动着从玻尔兹曼统计法到玻色－爱因斯坦统计法的转变。

现在让我们再回到杰恩斯对无差别原则的辩护上。他说这条原则已经被成功地应用于物理学，这无疑是对的。然而，在我看来，这表明，该原则作为一条启发原则是富有成效的，而作为一条逻辑原则却不是有效的。对于物理学假说的提出，无差别原则连同诸如不变性要求、关于粒子的可分辨性和不可分辨性的争论等额外的须考虑的因素一向都是——或许未来也同样是——十分有用的，但该原则却不能确立这些假说的真理性。像物理学中的任何其他假说一样，它们也必须得到经验的检验，仅当由它们所推出的预测与观察相符合时，它们才会被接受。无差别原则在启发上的成就无论如何也不能把它自身确立为一条能够表明假说具有独立于经验的正确性的逻辑原则。

通过再次考察杰恩斯对随机弦的案例的分析以及他所进行的认证性实验，这

种观点能够得到进一步的阐明。其实，另一位科学家（比方说K先生）经由不同的途径也可以得出与之相同的结论。让我们假定，K先生把无差别原则应用到了随机弦的案例上，但最初他心中只想到第三种方法［这种方法得出了$P(CLSE)=1/4$］。他先是根据这种方法计算出了弦长的全部分布，然后用与杰恩斯的完全相同的实验将它付诸检验。然而，K先生遇到的情况是，实验证明了他所假设的分布是错误的。面对这种反驳，K先生对问题作了进一步的分析。他突然灵机一动，想到了另外两种应用无差别原则的方法，而且他还考虑了不变性要求，这些要求表明第一种方法是这三种方法中最好的。以这样的方式，他成功地说明了他的实验结果。无差别原则对于K先生就如同对于杰恩斯那样，是一个有价值的启发工具，尽管它最初让他得到一个错误的结果。启发原则并非每次都必须给出正确的答案才算得上是富有成效的。不过，启发原则必须提出这样的假说，对它们的检验（或反驳）会带来进步。在我看来，无差别原则作为一条能被用来证明一个结果的原则，具有启发原则的性质而非逻辑原则的性质。

然而，概率的逻辑解释却要求无差别原则成为一条逻辑原则。仅当无差别原则在性质上属于逻辑原则时，逻辑解释才能够认可数值概率。此外，正如我们已经指出的，一种并不认可数值概率的概率解释几乎不能被认为是恰当的。因此，在我看来，不能为无差别原则悖论提供一个令人满意的解决方案，对概率的逻辑理论是一个致命的打击。将这里的情况与在演绎逻辑领域由罗素悖论的发现所导致的情况相比较，可以增强这一观点的说服力。

罗素悖论可以非常简单地从一条被称为概括公理（the axiom of comprehension）的原则中推导出来。在该悖论被发现之前，这条原则一直被第一流的逻辑学家——尤其是弗雷格、戴德金（R. Dedekind）与皮亚诺（G. Peano）——假定为真（若要引证，请参看 Gillies，1982：92）。这个悖论出现以后，人们力图把概括公理替换为其他不会导致任何矛盾的原则。为此，罗素引入了类型论。策梅罗（E. Zermelo）也曾独立地发现了这个悖论，他提出了一个公理化的集合论系统，该系统随后得到了司寇伦（T. Skolem）和弗伦克尔（A. A. Fraenkel）的改进。而冯·诺依曼（J. von Neumann）、贝奈斯（P. Bernays）与哥德尔（K. Godel）则发展出了另一个公理化的集合论系统。在数学家群体中，源于策梅罗的系统也许是最受欢迎的，但计算机科学家们却经常使用类型论。然而，从某种意义上讲，这三个系统至今都是成功的。尽管不可能证明它们是一致的，但它们确实成功地防止了从自身中推导出所有众所周知的逻辑悖论，并且在人们对这些系统超过60年的实际运用中，没有进一步出现过别的矛盾。这种情况与关于无差别原则的情况形成了十分鲜明的对照。从来就没有人对这条原则的修改作过清晰的阐述，使之足以杜绝所有悖论的导出。恰恰相反，那些修改只能阻止一些悖论，而

容许其他悖论继续存在。总而言之，从目前来看，要想成功地把无差别原则作为一条逻辑原则来修复，其希望是渺茫的。

凯恩斯用他关于柏拉图直觉（Platonic intuition）的摩尔式的理论来作为逻辑解释的基础，尤其是，他还根据这种观点来为相关的公理辩护。然而，正如我们将在下一章看到的，这种关于柏拉图直觉的理论也很容易招致极大的异议。总的来说，到20世纪20年代，逻辑解释所面对的困难已经到了一个严重的程度，使得贝叶斯主义者们真的需要提出一种新的概率解释，如果他们还想能够继续捍卫其立场的话。不过，这种新的解释，即概率的主观理论总算是出现了，我将在下一章对它作出考察。

第四章　主观理论

我也这样听说过，而且确有几分相信。

（莎士比亚，《哈姆雷特》：第一幕第一场第166行）

概率的主观理论分别由剑桥的弗兰克·拉姆齐（Frank Ramsey）和意大利的布鲁诺·德·菲耐蒂（Bruno de Finetti）大约在同一时期独立地发现。同时发现某个理论的这类事情实际上在科学和数学的历史上并不罕见。尽管那些独立的发现者们有着一套共同的构想，但是，他们对相关主题的论述无论是在细节上还是在总体思路上通常都是不一样的。这些差异具有相当大的价值，因为它们作为例证表明了相关理论中的某些可能存在的变异。近年来，伽拉沃蒂（M. C. Galavotti）发表了一系列重要的论文（Galavotti，1989，1991，1994），对拉姆齐和德·菲耐蒂的观点进行了详尽的比较。在阐述主观理论的过程中，我也会在各个不同的方面对拉姆齐和德·菲耐蒂之间的一些差异作出探讨。

存在着同时的发现也许并不值得那么大惊小怪。通常在相关主题下都会有某个问题情境，因而提出一些有几分类似的解决方案自然就是那些发现者们对同一问题情境的正常反应。在上一章我们已经看到，可以追溯到贝叶斯与拉普拉斯的逻辑贝叶斯传统在20世纪20年代中期遇到了很多严重的问题。一些统计学家［尤其是费希尔（R. A. Fisher）和内曼（J. Neyman）］与一些科学哲学家［如波普尔（K. R. Popper）］对这种局面的回应就是彻底摒弃贝叶斯主义。不过，另一种思路则是为贝叶斯主义设计一个新的版本，使之能够克服逻辑贝叶斯主义的困难。构设出这种新版的贝叶斯主义正是拉姆齐和德·菲耐蒂所取得的成就，这是通过他们对于概率的新的主观研究进路实现的。

由于拉姆齐通常被提及的关键性论文是他1926年的那篇文章，而德·菲耐蒂最早发表的几篇文章的日期都要较晚一些，因此可能看起来拉姆齐像是第一个发现者，而德·菲耐蒂则是在稍晚的时期灵机一动产生了同样的想法。然而，这种印象在一定程度上会使人产生误解。拉姆齐的论文《真理与概率》（“Truth and Probability”）写于1926年，并且它的大部分内容曾在剑桥的道德科学俱乐部被宣读，但它实际上到1931年才得以刊布。拉姆齐于1930年去世，年仅26岁，却已在数学基础、概率哲学、数理逻辑，以及经济学等领域作出了重大的贡献。

他论述概率的文章在其英年早逝之后首次出现在1931年出版的文集里。德·菲耐蒂说，早在1928年4月之前，他已完整地写就了根据主观主义的观点对于概率论基础的详细论述。这可能要比拉姆齐稍晚一点，但德·菲耐蒂却是最先发表其一系列文章（de Finetti，1930a，b，c）的。1931年，德·菲耐蒂在其《概率主义》［“Probabilism”（de Finetti，1931a）］一文中对该理论的哲学方面给予了全面的说明，他在这篇文章里并没有用到任何公式；随后，他又在同年的另一篇文章（de Finetti，1931b）里进一步提供了更多关于数学方面的基本原理的细节。拉姆齐肯定是从未听说过德·菲耐蒂的，而德·菲耐蒂也似乎在1937年之前——即在他自己的观点得以完整地阐发之前——不曾读过拉姆齐的文章［参见他于1964年在de Finetti，1937：102所加的新注脚（a）］。可见，他们的发现是完全独立的，而且几乎是在同时进行的。

拉姆齐与较为老派的逻辑传统的关系是非常明显的，因为他是在详尽地批评凯恩斯的观点的基础上引入他的新理论的。然而，在德·菲耐蒂构设主观理论的时候，他看上去没有受到凯恩斯的影响。诚然，在他1931年的一篇论文（de Finetti，1931a）里，他似乎拿不准凯恩斯的确切观点，于是在一个脚注中谈到："这在我看来是凯恩斯的观点；但我不能有把握地断定，因为一直以来我所能做到的仅仅是快速地浏览他的论著。"（de Finetti，1931a：221）后来，德·菲耐蒂在对凯恩斯的观点进行阐述和批评时，又在一个脚注中谈论道："我在1929年简要地看了凯恩斯的书（并在……1931年的……《概率主义》里引证了它），然而，我只看懂了一点点，因为我那时的英语水平还很有限。今年我已经阅读了它的德文版。"（de Finetti，1938：362）因此，德·菲耐蒂只是在他自己的观点完全形成以后才对凯恩斯进行真正的研究，这看来是明白无误的。指出以下这一点也是很有意思的，那就是：虽然德·菲耐蒂1938年的论文名为"剑桥概率理论家"（Cambridge Probability Theorists），但他只提及凯恩斯和杰弗里斯，而没有提及拉姆齐。这表明他很可能只是在1938年以后才读到拉姆齐的文章的。考虑到这一切情况，在紧接下来的一节，我将从拉姆齐对凯恩斯的批评开始谈起，因为这些内容是对上一章的自然承接。不过，在本章的最后一节，我也会对德·菲耐蒂与之不同的研究主观概率的路径加以一定的考虑。而其余各节则会对主观理论本身作出阐释。"数学概率的主观基础"表明了数学概率论如何能够在主观进路的基础上得以发展，并且特别给出了对于那个极为重要的拉姆齐－德·菲耐蒂定理的详尽证明。"主观理论中的似客观概率"会对关键概念"**可交换性**"（exchangeability）作出介绍，正如我们将会看到的，这一概念在该理论中起着至关重要的作用。这两节主要以德·菲耐蒂的著作（de Finetti，1937）为根据，那是我自己比较喜欢的对于这种理论的说明。然而，为了论述得清楚明晰，我将作出一些改

动并对某些内容加以进一步的阐述，而且还会谈到一些在拉姆齐那篇文章和德·菲耐蒂的后期著作中所提到的可供选择的思路。“本章所论及的公理系统与柯尔莫哥洛夫公理的比较*”和“独立性与可交换性的关系*”涉及一些需要用到颇为高级的数学知识的地方，而在另外一节我将提出我对德·菲耐蒂的可交换性归约的批评。

第一节　拉姆齐对凯恩斯的批评①

按照凯恩斯的观点，一对命题之间存在着逻辑的概率关系（logical relation of probability），而且这些关系在某种意义上是可以被感知的。拉姆齐对此作出了如下的批评：

> 但让我们现在再回过头来讨论一个对凯恩斯先生的观点的更为根本的批评，这个批评是显而易见的，即实际上看来并没有任何像他所描述的概率关系那样的东西。他认为，无论如何，它们在某些情况下是能够被感知的；可是就我本人而言，我确信这不是真的。我就没有感知到它们，而且，如果要让我对它们的存在表示信服，那一定得通过论证才行；此外，我有把握地猜想其他人也没有感知到它们，因为对于任何两个给定的命题之间究竟存在着怎样的一种概率关系，他们几乎不能达成一致的意见。
>
> （Ramsey，1926：161）

这是一个有意思的例子，表明了一个论点的论证力度还取决于提出它的那个人的身份。如果一位没有拉姆齐那么杰出的逻辑学家以他不能感知到任何逻辑的概率关系作为反对的理由，那么凯恩斯也许会回应说：这仅仅是逻辑无能（或者说是逻辑盲）的一个迹象。诚然，凯恩斯的确说过：“有些人——实际上这是一个明显的事实——可能具有比其他人更强的逻辑直觉能力。”（Keynes，1921：18）然而，拉姆齐不单是一位才华横溢的数理逻辑学家，而且还是剑桥使徒会的成员。因此，凯恩斯不可能合理地声称拉姆齐在逻辑直觉或逻辑知觉方面缺乏能力——再说，凯恩斯事实上也没有这样做。

为了支持自己的基本论点，拉姆齐指出，根据逻辑理论，我们能够明显地感知到出现在相当复杂的事例中的逻辑关系，但在简单的事例中却完全不能感知到它们。于是他说：

> 关于它们（即凯恩斯的逻辑的概率关系——引者注），看来我们所知道

的一切就是某几个普遍命题，即加法律和乘法律；这就好像是，每个人都知道几何学的那些定律，但却没人能识别出任何一个给定的对象是圆的还是方的；而且，我觉得难以想象这么大量的普遍知识是如何能与这么微少的具体事实结合在一起的。对于一些特定的事例，共识确实是有的，但有几分悖谬的是，这些事例总是极其复杂；我们所有人都同意一枚硬币落下后正面朝上的概率是1/2，可是我们没有人能够确切地说出支持这一结论的证据是什么，而它其实是作为我们当时正在对之作出断定的那个概率关系的另一个关系项而存在的。另一方面，即便我们以诸如“这是红的”和“那是蓝的”或“这是红的”和“那是红的”这样最为简单的可能存在的命题对子为例——谅必它们的逻辑关系应该是最容易看出来的，我想也没有谁敢有把握地说他晓得连结它们的概率关系是什么。

(Ramsey，1926：162)

我们只要考察一下逻辑直觉在演绎推理方面的境遇，就可以加强拉姆齐对于把概率论建立在逻辑直觉的基础上的做法的怀疑，既然演绎推理与归纳推理相比无疑是不那么成问题的。作为有史以来最伟大的逻辑学家之一，弗雷格受到逻辑直觉的指引而支持所谓的概括公理，但罗素悖论却可以以好几种方式从这条公理中推演出来。而且，与他一样杰出的戴德金和皮亚诺也犯了相同的错误（若要引证，请参看 Gillies，1982：92）。希尔伯特（D. Hilbert）和布劳威尔（L. E. J. Brouwer）是20世纪的两位伟大数学家。然而，希尔伯特的逻辑直觉告知他本人排中律在数学中是有效的，而布劳威尔的逻辑直觉却告知他本人排中律在数学中是无效的。这一切均表明逻辑直觉在演绎方面是极不可信赖的，因而，至于归纳推理，逻辑直觉那就几乎是根本不可信赖的了。

这样说来，是否所谓的逻辑直觉就仅仅是由熟悉性所导致的一种心理幻觉呢？那些公理看上去在直觉上是显而易见的，可能只是作为多年来研究数学概率论的一个结果。或许亚里士多德（Aristotle）的哲学的基本原理在中世纪的欧洲学者看来是在直觉上显而易见的，而儒家学说的基本原理在同一时期的中国学者看来也是在直觉上显而易见的。我所得出的结论是，用逻辑直觉去证实部分衍推度是存在的或它们服从常规的概率公理，都是不恰当的。因此，下一节让我们来检视一下主观理论是如何处理这些问题的。

第二节　数学概率的主观基础：拉姆齐－德·菲耐蒂定理

在逻辑解释中，h 相对于 e 的概率被等同于某人在具有证据 e 时对 h 所赋予

的合理置信度。这种合理置信度被认为对于所有有理性的个人都是一样的。概率的主观解释摒弃了“理性会导致共识”这一假定。根据主观理论，对于不同的个人（比方说A女士、B先生及C少爷），尽管他们全都是完全合乎理性的，而且还具有相同的证据e，但是却可能对h怀有不一样的置信度。于是，概率便被定义为一个特定的人的置信度，因而我们其实不应该说这一概率（the probability），而应该说A女士的概率、B先生的概率或者C少爷的概率。

如今，数学概率论把概率看做是区间［0，1］之内的数值。故此，若主观理论要想成为相关数学演算的恰当解释，那就一定得找出测度某人对某一证据（比方说E）将会出现的置信度的方式。这样，我们便希望能够测度——例如——B先生对伦敦明天将会下雨的置信度、对某一政党将会赢得下届选举的置信度等等。如何能做到这一点呢？

拉姆齐对这个问题做过一个有意思的探讨。他对该问题的第一种意见是，“我认为，有理由相信，置信度是可以用心理肤电反应计（psychogalvanometer）或诸如此类的仪器来测度的。”（Ramsey，1926：161）拉姆齐的心理肤电反应计也许是一台有点像高级测谎仪的电子装置。我们可以把电极连接到B先生的脑壳上，这样，当他读出一个描述正被讨论的事件E的命题时，该机器就会显示他对那个命题的置信度。当然，就算这样的一个心理肤电反应计在原理上是完全可行的，目前也不存在这种机器，因而我们不能够以这种方式去解决我们所面临的测度信念的问题。

接下来拉姆齐还考虑了运用内省来估计我们对于某个命题的信念感觉（belief-feeling）的强度的可能性。不过，他提出了一个有意思的论点来反对这样的一种思路：

> 首先，我们可以假定，一个信念的强弱程度是能被其持有者所感知的；比如说，信念间的差异就体现在伴随着它们的某种感觉的强度上，因而我们可以把这种感觉称为信念感觉或确信感觉，并以置信度来指谓这种感觉的强度。这种观点将会十分不方便，因为要把数值赋予感觉的强度是不容易的；但除此以外，在我看来，这种观点还犯了很直观的错误，因为我们所持的最为强烈的信念通常无论如何都几乎不会伴随有任何的感觉；没有人会对他视为理所当然的事情怀有强烈的感觉。
>
> （Ramsey，1926：169）

毫无疑问，拉姆齐在此处是正确的。当我切一片面包来吃的时候，我非常强烈地相信它将滋养我而非毒害我，但这个信念在正常的情况下是不会伴随有任何强烈

的感觉的，或者说其实就根本不会伴随有任何感觉。于是拉姆齐得出了这样的结论：“……一个信念的强弱程度是它的一个因果属性，我们可以把这一属性粗略地表述为我们愿意按照该信念行事的程度。”（Ramsey，1926：169）对于我的这一信念——那块面包是有营养的而不是有毒的，我会毫不犹豫地把面包吃掉，以此表明我确实愿意按照这个信念行事，即使我当时并没有任何强烈的感觉。

根据这种思路，我们应当通过细察由一个信念所导致的某种行为的特质来测度该信念的强度。而一种能满足测度目的的合适行为则是打赌，因此拉姆齐断定：“早已确立的测度一个人的信念的方式就是提议打赌，然后看看他所愿意接受的最低倍率是多少。这种方法我认为基本上是明智的。”（Ramsey，1926：172）德·菲耐蒂（de Finetti，1930a）也是采用打赌来测度置信度的。

打赌当然只是某一信念所能导致的其中一种行为。因此，相对于某一信念可能会导致的其他类型的行为，打赌是否就能很好地测度那一信念的强度呢？拉姆齐假定它能，并为此作出了如下的辩护：

> *这节……基本上是以打赌为根据的，但是，当我们意识到在某种意义上我们一生都在打赌的时候，这就不会显得不合理了。每当我们到车站去，我们总是打赌说火车确实会行驶，而如果我们对此没有足够的置信度，我们将会拒绝打这个赌而留在家里。*
>
> （Ramsey，1926：183）

我个人的看法是，在很多情况下打赌的确是对一个信念的强度给予了合理的测度，但并非所有的情况都如此。尤其是，打赌不能用于测度某个人关于一个普遍的科学规律或理论的信念的强度（欲了解对这方面的一个讨论，请参见 Gillies，1988a：192－195）。不过，让我们暂且把打赌当做测度置信度的一个合理途径，然后看看这个假定会导致什么。

要这样做的话，我们现在就必须提到一些数学方面的内容，可是，由于本书的目的在于对概率的哲学方面作出探讨，所以我已经尝试着使这些数学内容尽可能地简单，而其实所要涉及的也只不过是初等代数而已。我们必须首先设定一个假设的打赌情景，在其中，B 先生愿意压在 E 上的赌注与赌注总额的比率［即他对 E 的**赌商**（betting quotient）］可以视作对于他对 E 的置信度的一个测度。接下来我们会引入**一贯性**（coherence）条件。显而易见的是，为了使得赌商是一贯的（coherent），B 先生应当对它们作出选择，而这就导致了那个最重要的结论［**拉姆齐－德·菲耐蒂定理**（The Ramsey-de Finetti Theorem）］，它说明了：一组赌商是一贯的，当且仅当，它们满足概率公理。我将会全面地阐述概率公理，然后

证明拉姆齐－德·菲耐蒂定理对于每一条公理都是成立的。根据主观主义的观点，数学概率论的基础将以这种方式得到确立。

一、赌商（q）的定义

我们设想，A 女士（一位心理学家）想要测度 B 先生对某一事件 E 的置信度。[②]为了做到这一点，她要让 B 先生同意在以下的条件下与她就 E 进行打赌。B 先生必须选择一个数值 q（称之为他对 E 的赌商），然后 A 女士再选定双方的赌注总额 S。如果 E 发生，则 B 先生支付 qS 给 A 女士以此作为对 S 的交换。S 可以是正的，也可以是负的，但 $|S|$ 在 B 先生的财产中只能占一个较小的份额。在这些条件下，q 被看做是对于 B 先生对 E 的置信度的一个测度。

下面是关于这个定义的一些评论。首先，很重要的一点是，在选择 q 的时候，B 先生并不知道赌注总额 S 是正的（对应于他赌 E 会出现）还是负的（对应于他赌 E 不会出现）。若 B 先生早知道 S 将会是正的，则把 q 选得尽可能低会对他有利；若他早知道 S 将会是负的，则把 q 选得尽可能高会对他有利。在这两种情况下，q 都并非对应于他真实的置信度。然而，如果他不知道 S 将会是正的还是负的，那他就不得不根据他的实际信念来对 q 作出调整了。

我们可以举一个来自股票市场的假设的例子来对此作出说明。假定 B 先生现在是一个股票经纪人，我想向他了解一只特定的股票［比方说 BP（英国石油公司）］的价值。如果我对他说："我想卖出 100 股 BP 的股票，你认为它们的价值是多少？"那么，B 先生的报价大大低于他所认为的正确价值将会对他有好处，要是他希望能够通过这种方式低价购得一些 BP 的股票的话。相反，如果我对他说："我想买进 100 股 BP 的股票，你认为它们的价值是多少？"那么，B 先生的报价大大高于他所认为的正确价值将会对他有好处，要是他希望能够通过这种方式沽售一些 BP 的股票以获取厚利的话。然而，如果我在询问 B 先生关于 BP 的股价的意见时，不告诉他我是否打算买进或卖出，则有机会迫使他说出他对于股价的真实看法。当然了，这仅仅是为了说明问题而举出的一个假设的例子而已。在股票市场的实际操作中，股票经纪人是既要报买入价也要报卖出价的。

其次，我所关心的是对赌注总额 S 的量值的测度方式，因为在这个地方，德·菲耐蒂（至少在他早期的文章中）和拉姆齐之间是存在着分歧的。德·菲耐蒂是以金钱作为赌注的，而拉姆齐则阐发了一种效用理论，并以他所定义的效用作为赌注。我个人较为偏爱德·菲耐蒂早期的思路，即以金钱作为赌注，而且我还会简要地讨论一下相关的一些问题。

如果那些打赌是要赌钱的，那么很明显，所涉及的金额不应该太大——至少与 B 先生的财富相比，其数额不应该太大。假如说 B 先生的全部存款总共才 500

英镑，那么，A 女士若提议以 500 英镑作为赌注总额与 B 先生就明天是否下雨进行打赌，则是不合理的。另一方面，如果 B 先生恰巧是一个亿万富翁，那 500 英镑的赌注总额就不会是不合理的，只要 A 女士的研究经费也能负担得起这种数额的赌资的话。

拉姆齐认为这类困难构成了反对以金钱作为赌注的打赌的强有力理由，因为他写道："……若用金钱来打赌，那显然这样的打赌应该是倾向于让赌注尽可能地小的。可是这么一来，人们又不愿为了区区小钱而煞费思量，相关的测度就会被这个新引入的因素给破坏掉。"（Ramsey，1926：176）然而，在我看来，这个困难是能被克服的。A 女士必须对赌注总额的大小作出选择，一方面使之与 B 先生的财富相比足够地小而不至于让打赌在财政上对他造成损害，但另一方面要使之大得足以让他对打赌作出认真的考虑。我认为，一般说来，是有可能找出这样一个水平上的赌注总额的，尤其是当我们必须把 B 先生设想为愿意对试图测度他的置信度的心理学实验作出配合的时候。如果 B 先生是完全抵触这样的实验的，那它就绝对不可能进行了。

尽管如此，在我看来，那些并不是什么反对用钱打赌的重大理由，相反，我却把为效用引入一种令人满意的测度方式视为一项实际上不可行的任务。通过给出一些引文作为例证来表明拉姆齐本人的做法，我们可以看出其中的一些困难。拉姆齐写道：

> 让我们把一个人最终想得到的东西称为"善"，并且让我们首先假定它们在数值上是可测度的和可加的。那就是说，如果是出于游泳本身的目的他更倾向于选择 1 小时的游泳而非 1 小时的阅读，那么他将更倾向于选择两小时的游泳而非 1 小时的游泳加 1 小时的阅读。上述的例子当然是荒谬的，但这可能只是因为，一来游泳和阅读都不是终极的善，二来我们也可以设想：由于疲劳等原因，第二个小时的游泳不会精确地相似于第一个小时的游泳。
>
> （Ramsey，1926：173－174）

如果说存在着任何令人满意的用以比较一个小时的游泳和一个小时的阅读的效用的方式，我觉得这是难以置信的。它们二者都能给人带来相当大的乐趣，但那些乐趣完全是属于两种不同的类型的，因而是不可比较的。拉姆齐认为这个困难可以通过引入"终极的善"而得到克服。可是，这些终极的善又是什么呢？从来就不曾有任何终极的善得到过确切的说明，而且这样的一个东西看上去像一个无根据的观念而非一个实际存在的事物。

在他从另一个层面引入效用的论述里，拉姆齐写道："……通过向他提供各

种选择，我们可以发现他是如何按照优劣程度排列世界的所有可能进程的。借助这种方式，就可以根据价值的大小给所有可能世界排序。”（Ramsey，1926：176）这样的一种做法似乎属于纯粹的幻想。不妨拿它的现实可行性与压 1 英镑的赌注就明天是否下雨进行打赌的现实可行性来比较一下。

可能有人会表示反对，说这些论据都仅仅是针对拉姆齐引入可测度的效用的方式的，还说也许可以找到其他更为令人满意的方法。然而，其他方法都包含了类似的困难，而且常常会导致一些难以解决的奇特的悖论。为了避免这方面的潜在困难而只考虑以恰当数额的金钱作赌注的打赌，无疑是更好的做法。这后一种做法非但不属于幻想，而且很容易就能在现实中实施。事实上，德·菲耐蒂过去就常常让他的一班学生提出他们对意大利足球比赛结果的赌商。由于生性民主，德·菲耐蒂还会请门房一同参与打赌，而门房几乎总是大获全胜，因为对于足球，他比其他人更在行。

对于打赌方案，可能还会有别的反对意见，认为它所得出的结果只是非常粗略的估计和一点也不精确的数值概率。德·菲耐蒂对这种观点的回应是，精确的以数值表示的置信度确实是多少有点虚构的或理想化的成分，但这种理想化是一种有益的理想化，因为它简化了数学计算。再说，倘若我们没有忘了必须把数学理解为近乎精确地有效的话，那么，这种理想化并无害处。正如德·菲耐蒂所说：

> ……如果你想要运用数学，你就得摆出好像被测度的量都有一个精确的值的样子。众所周知的是，这样的假设是十分富有成效的；事实上它仅仅是一个假设，但这也无损于它的价值，只要我们考虑到结果的精确性将会达到它所能达到的程度。……为了能在数学的有效帮助下从近乎精确的前提得出近乎精确的结论，我也必须遵循一个精确的演算程序，即使我只视之为一种策略。
>
> （de Finetti，1931a：204）

最后，我自己的结论是，我们应该运用打赌方案，但条件是要用金钱来打赌而且要恰当地选定赌注的金额；这确实给出了一种在很多情况下用以测度信念的合理方法。因此，我所遵循的是德·菲耐蒂早期的研究进路。然而，令人奇怪的是，德·菲耐蒂后期的思想却朝着运用效用的方向发展，而且他后期的文章甚至彻底摒弃了打赌进路。在 1957 年的时候，德·菲耐蒂仍然心存顾虑，不愿意仿效萨维奇（L. J. Savage）试图在决策论的框架内把概率和效用统一起来的做法（参见 Galavotti，1989：240 的引述）。不过，到了 1964 年，他给那篇 1937 年发

表的论文添加了一个新的脚注，他在其中写道："这样的一种表述方式和拉姆齐的一样，可以更好地处理期望效用。"（de Finetti，1937：102）在他那本1970年出版的书中，他主要借助决策论来引入主观概率。他还阐发了一种效用理论，尽管他看来仍然对此有某种程度的怀疑（参见de Finetti，1970：76－82）。在他很后期的一篇文章里，他甚至拒斥整个打赌进路，否认其适当性，他写道："……严格地说，打赌并非与概率而是与博弈论直接相关……正因如此，所以我才构想出'恰当的评分规则'（proper scoring rules）并把它们应用于实验（概率预报）。"（de Finetti，1981b：55）可见，德·菲耐蒂本人走上了决策论与效用的路子。然而，出于前面已经提到的原因，我自己更为偏爱德·菲耐蒂早期的进路，并将以此作为我下面论述的基础。[3]

主观进路所面对的第一个问题就是如何测度置信度。我们已经看到了打赌方案是怎样为这个问题提供一个合理的解决方法的。从上面所描述的那段情景中可以得知，B先生对E的置信度是通过他对E的赌商来测度的。值得注意的是，这种引入概率的方式所依据的是**操作主义**（operationalism）哲学。近年来，拉德（F. Lad）对主观概率作出了重大的贡献。在其著作（Lad，1996）中，他为主观概率提供了一个类似于德·菲耐蒂所提供的基础，但又超越了德·菲耐蒂，因为他详尽地说明了如何能从这种观点引申出统计学。他的书的书名和该书本身的内容表明，拉德谈论的是"操作的主观统计方法"（operational subjective statistical methods），这所强调的重点是，主观概率是以操作主义为基础的。拉德写道："**一种在操作上得到定义的测度**（an operationally defined measurement）就是一组明确规定的、若按此行事则会得到一个数值的活动程序。"（Lad，1996：39）很明显，刚才所描述的那种借助赌商对置信度的测度在此意义上就是在操作上得到定义的测度。在下面的论述中，我们还会时不时地回过头来谈论主观概率与操作主义之间的这种联系。

现在让我们来检视一下主观进路中出现的第二个问题。如果主观理论是要为标准的数学概率论提供一个解释，那么这些置信度（或者说是赌商）是应当满足标准的概率公理的。但为什么它们应该如此呢？我们似乎很容易就可以设想出有这么一个人，他的置信度是相当任意的而且并不满足任何概率公理。主观主义者们通过运用"**一贯性**"概念，解决了这一问题，还导出了概率公理。接下来，我将给出这个概念的定义，然后对它的重要性作出评论。

二、一贯性

如果B先生非得在E_1，…，E_n等事件上下注打赌，那么，他的赌商被认为是一贯的，当且仅当，A女士不能通过选定赌注总额S_1，…，S_n而使得她无论

如何都会赢。如果A女士能通过选定赌注总额而使得她无论如何都会赢，那么她就会被认为对B先生打了一个**大弃赌**(Dutch Book)。

以下情况被看做是不言自明的，即B先生希望他的打赌都是一贯的，也就是说，他希望能避免出现他无论如何都会输的可能性。令人惊奇的是，若要让赌商满足概率公理，这一条件不但是必要的而且是充分的。这正是下面那个定理的内容。

三、拉姆齐－德·菲耐蒂定理

一组赌商是一贯的，当且仅当，它们满足概率公理。

到目前为止，我们已经对逻辑理论和主观理论作了一个对比。概率在逻辑理论中是合理置信度，而在主观理论中则是置信度。一贯性表明，这个概念本身就意味着某种约束性，由于一贯性毕竟是一个基于合理性的限定条件，因而主观进路中的置信度必须至少在一定程度上满足这一限定条件才是合乎理性的。在其1937年的论文《预见：其逻辑规律与主观根源》（“Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources”）的题目中，德·菲耐蒂很好地表达了这一点。这里所说的逻辑规律就来自于一贯性条件。当然了，一贯性并不会唯一地确定一个合理置信度，而是留有范围广阔的选择余地。因此，概率的赋值还须归因于某些主观根源。

拉姆齐使用“一致性”（consistency）这个术语来表示一贯性，并写道：“关于概率的法则就是关于一致性的法则。”（Ramsey，1926：182）此处所体现的意图是，我们必须确保我们各种各样的置信度是相互协调的，从而避免会导致我们面临大弃赌的“矛盾”的出现。现在人们普遍倾向于采用“一贯性”这个术语，因为一致性在演绎逻辑中有一个定义明确但又不一样的意义。纵然这是一个类比，但看来还是使用不同的术语比较好。我马上就会给出拉姆齐－德·菲耐蒂定理的一个详尽证明。首先，我将对诸概率公理作出说明，然后依次证明该定理对于每一条公理都是成立的。

四、概率公理

令E，F，…，E_1，F_1，…代表事件，我们对于它们是否将要发生或者是否已经发生能够有一定的置信度。令Ω表示确定事件，它是必然会发生的。以下是三条概率公理。

公理1：对于任何E，$0 \leq P(E) \leq 1$，并且$P(\Omega) = 1$。

公理2（加法律）：如果E_1，…，E_n是互斥（亦即不可能有两个事件同时发生）且穷举（亦即至少有一个事件必定会发生）的事件，那么

$$P(E_1)+\cdots+P(E_n)=1$$

公理3（乘法律）：对于任意两个事件E，F，

$$P(E\&F)=P(E\mid F)P(F)$$

加法律还能以一种不一样的但等值的形式来表述。对于任意的事件E，F，令E∨F代表这样的一个事件，它意谓E有可能单独发生、F也有可能单独发生以及二者有可能同时发生。于是我们可得：

公理2′（加法律的另一种可供选择的形式）：如果E，F是任意的两个互斥事件，那么

$$P(E)+P(F)=P(E\vee F)$$

我们能以如下的方式证明公理2和公理2′的等值性：

（a）（公理2→公理2′）：令E，F为互斥事件，再令$\Omega\backslash(E\vee F)$代表这样的一个事件，它意谓有E和F以外的其他事情发生。E，F与$\Omega\backslash(E\vee F)$是互斥且穷举的事件。因此，根据公理2，

$$P(E)+P(F)+P(\Omega\backslash(E\vee F))=1$$

另一方面，E∨F与$\Omega\backslash(E\vee F)$也同样是互斥且穷举的事件。因此，根据公理2，

$$P(E\vee F)+P(\Omega\backslash(E\vee F))=1$$

于是通过替换，我们可得

$$P(E)+P(F)=P(E\vee F)，亦即公理2′。$$

（b）（公理2′→公理2）：首先我们要借助归纳法证明公理2′对于任意的n个互斥事件都是成立的。$n=2$的情况恰好就是公理2′本身。假设这一结论对于$n-1$也成立，这就是说，如果E_1，…，E_{n-1}是任意的互斥事件，那么

$$P(E_1)+\cdots+P(E_{n-1})=P(E_1\vee\cdots\vee E_{n-1})$$

现在考虑 n 个互斥事件 E_1，…，E_n。事件（$E_1 \vee \cdots \vee E_{n-1}$）与 E_n 也是互斥的。因此，根据公理 2′，

$$P(E_1 \vee \cdots \vee E_{n-1}) + P(E_n) = P(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$$

另一方面，因为 E_1，…，E_n 都是互斥的事件，所以可以得出

$$P(E_1) + \cdots + P(E_n) = P(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$$

但如果 E_1，…，E_n 既是穷举的又是互斥的，那么 $E_1 \vee \cdots \vee E_n$ 就是概率为 1 的确定事件，从而便推导出了公理 2。

五、拉姆齐－德·菲耐蒂定理的证明④

（一）有关公理 1 的证明

（a）一贯性→公理 1：让我们首先考虑涉及确定事件 Ω 的情况。如果 B 先生选择 $q(\Omega) > 1$，那么 A 女士选择 $S > 0$ 就能赢；如果 B 先生选择 $q(\Omega) < 1$，那么 A 女士选择 $S < 0$ 就能赢。故此，为了让赌商是一贯的，B 先生必须选择 $q(\Omega) = 1$。现在，以任意的一个事件 E 为例。如果 B 先生选择 $q(E) > 1$，那么 A 女士选择 $S > 0$ 就能赢；如果 B 先生选择 $q(E) < 0$，那么 A 女士选择 $S < 0$ 就能赢。故此，为了让赌商具有一贯性，B 先生必须选择 $0 \leq q(E) \leq 1$。

（b）公理 1→一贯性：如果 B 先生选择 $q(\Omega) = 1$，那么 A 女士就根本没有办法赢，因为无论 S 的符号是什么，反正那份赌注就只不过是从一方传到另一方然后又再传回来罢了。对于一个任意的事件 E，A 女士不能通过选择 S 的符号或数额而使得她每次都赢，如果 B 先生选择 $0 \leq q(E) \leq 1$ 的话。

（二）有关公理 2 的证明

（a）一贯性→公理 2：假设 B 先生选择了赌商 q_1，…，q_n，A 女士选择了赌注总额 S_1，…，S_n。

这样，如果发生了事件 E_i，则 A 女士所获得的收益 G_i 就是

$$G_i = q_1 S_1 + \cdots + q_n S_n - S_i \quad (4.1)$$

因此，如果 A 女士设定 $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = S$，那么

$$G_i = S(q_1 + \cdots + q_n - 1)$$

可见，如果 B 先生选择 $q_1 + \cdots + q_n > 1$，那么 A 女士通过设定 $S > 0$ 就每次都能赢；如果 B 先生选择 $q_1 + \cdots + q_n < 1$，那么 A 女士通过设定 $S < 0$ 就每次都能赢。故此，为了让赌商是一贯的，B 先生必须选择 $q_1 + \cdots + q_n = 1$。

（b）公理 2→一贯性：既然公理 2 成立，于是我们有 $q_1 + \cdots + q_n = 1$。现在根据上面的式 4.1，我们有

$$q_i G_i = q_i(q_1 S_1 + \cdots + q_n S_n) - q_i S_i$$

因此，通过累加 i，我们便得到

$$q_1 G_1 + q_2 G_2 + \cdots + q_n G_n = 0 \qquad (4.2)$$

式 4.2 表明 G_i 不可能都是正的，其理由如下。由于 $q_i \geqslant 0$，而且它们连加的总和为 1，所以它们中至少有一个必须大于 0。因此，如果所有的 G_i 都大于 0，则 $q_1 G_1 + \cdots + q_n G_n > 0$，这就与式 4.2 相矛盾了。可见，并非所有的 G_i 都能够是正的，这相当于说，那些赌商都是一贯的。对 $q_1 G_1 + q_2 G_2 + \cdots + q_n G_n$ 进行考虑可能看起来好像需要数学技巧，但事实上它却有一个简明的直觉意义。[5]这正是 A 女士相对于 B 先生所选择的概率的期望收益。如果这一期望收益是零，那么 A 女士就不能对 B 先生打一个大弃赌了。

为了证明拉姆齐 - 德 · 菲耐蒂定理对于公理 3 是成立的，我们需要以下的定义。

六、条件赌商的定义

相对于 F 时对 E 的条件赌商 q（E | F）就是 B 先生在如果 F 不发生则打赌取消而且所有赌注都会被退还的条件下对 E 所赋予的赌商。

拉姆齐认为："这种有条件的打赌在 18 世纪是经常进行的。"（Ramsey, 1926：180）

（一）有关公理 3 的证明

在证明的各个环节，我们都会用到以下的符号：

$$q = q(\mathrm{E\&F})$$
$$q' = q(\mathrm{E} \mid \mathrm{F})$$
$$q'' = q(\mathrm{F})$$

（a）一贯性→公理3（在证明中用到了行列式）：假设B先生选择上述的q，q'，q''作为赌商，而A女士则选择了相应的S，S''，S'''作为赌注总额。由此会出现三种可能的情况，我们将计算A女士在每种情况中的收益。

1. E和F同时发生

$$G_1 = (q-1)S + (q'-1)S' + (q''-1)S''$$

2. E不发生，但F发生

$$G_2 = qS + q'S' + (q''-1)S''$$

3. F不发生

$$G_3 = qS + \quad + q''S''$$

对于确定的G_1，G_2，$G_3>0$，存在着三个线性方程，这些方程一共含有三个未知数S，S''，S'''。于是，它们总会有一个解，除非它们所组成的行列式不复存在。因此，为了一贯性，我们必须有

$$\begin{vmatrix} q-1 & q'-1 & q''-1 \\ q & q' & q''-1 \\ q & 0 & q'' \end{vmatrix} = 0$$

上两行分别减去最底行，然后最顶行再减去中间那一行，从而得到

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & q' & -1 \\ q & 0 & q'' \end{vmatrix} = 0$$

接下来，按第一行展开，我们可得

$$-q'q''+q=0$$

因此，正如所要求的那样，$q=q'q''$。

考虑到有读者不太熟悉关于行列式的理论，下面给出一个没有使用行列式但能得出同样结果的证明。

（b）一贯性→公理3（在证明中没有用到行列式）：假设A女士选择了$S=+1$，$S'=-1$，$S''=-q'$，于是我们有

$$G_1=(q-1)+(1-q')+q'-q'q''=q-q'q''$$
$$G_2=q-q'-q'q''+q'=q-q'q''$$
$$G_3=q-q'q''$$

因此，A女士的所有收益都是正的，除非$q\leqslant q'q''$。

类似地，如果A女士选择$S=-1$，$S'=+1$，$S''=q'$，那么，她所有的收益都是正的，除非$q\geqslant q'q''$。因此，正如所要求的那样，为了一贯性，B先生必须选择$q=q'q''$。

（c）公理3→一贯性：我们必须表明，如果$q=q'q''$，则赌商是一贯的，亦即A女士的收益G_1，G_2，G_3不可能全都是正的。我们在此会使用在涉及公理2的证明中所用过的方法，所以需要先考虑A女士相对于B先生所选择的概率的期望收益，然后再表明它为零。事实上，A女士的期望收益是$\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\lambda_3G_3$，其中$\lambda_1=q'q''$，$\lambda_2=(1-q')q''$，$\lambda_3=1-q''$。因为$0\leqslant q'\leqslant 1$，$0\leqslant q''\leqslant 1$，所以每个$\lambda_i\geqslant 0$。

这样一来

$$\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\lambda_3G_3=\alpha S+\beta S'+\gamma S'',$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha&=q'q''(q-1)+(1-q')q''q+(1-q'')q\\&=q''(q'q-q'+q-qq'+(1-q'')q')\text{，因为 }q=q'q''\\&=q''(q'q-q'+q'q''-qq'+q'-q'q'')\\&=0\end{aligned}$$

$$\beta=q'q''(q'-1)+(1-q')q''q'=0$$

$$\gamma = q'q''(q''-1) + (1-q')q''(q''-1) + (1-q'')q'' = 0$$

故此，$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 = 0$。

但现在至少有一个 $\lambda_i > 0$，其理由如下。当 $q'' \neq 1$ 时，$\lambda_3 > 0$；又或者当 $q'' = 1$ 时，$\lambda_1 = q'$，$\lambda_2 = 1 - q'$。在后一种情况下，当 $q' \neq 1$ 时，$\lambda_2 > 0$；又或者当 $q' = 1$时，$\lambda_1 > 0$。由此可以得出，并非所有的 G_i 都能够是正的，因而，正如所要求的那样，B 先生的赌商是一贯的。

拉姆齐－德·菲耐蒂定理是一项了不起的成就，它清楚地展现了主观理论相对于逻辑理论的优势。在逻辑理论中，对概率公理的辩护只能含糊地诉诸直觉，这种做法并不能令人满意，而主观理论则能够以极为似真的一贯性条件为出发点对概率公理进行严格的证明。鉴于拉姆齐－德·菲耐蒂定理的合理性，要否认主观理论为概率的数学演算提供了一个有效解释的确是很难的——尽管当然也可以认为这一演算还存在着其他的有效解释。此外，主观理论在实际上使得无差别原则变为不必要的——也就是说它至多就是一个启发工具，从而解决了无差别原则悖论。在逻辑理论中，该原则对于获取据称是独一无二的验前合理置信度是必要的，但按照主观理论，根本就不存在独一无二的验前概率。不同的个人可以以不同的方式选择他们的验前概率，只要它们是一贯的，这些不同的选择就没有什么可非议的了。因此，如果无差别原则被用做一个启发工具而对相关的验前概率提出两个不同的可能数值，那并不会出现任何矛盾。B 先生可以选择这两个可能数值中的一个作为他的主观估值，而 A 女士也可以选择另一个。拉姆齐十分清楚主观理论在这方面要优于逻辑理论，并对此作了如下的说明：

> 首先，它为我们提供了一个对该演算的公理的明白无误的辩护，这是像凯恩斯先生的系统那样的一类系统所完全缺乏的。因为现在很容易就能看出，如果部分信念是一致的，那它们就会服从这些公理，但让人全然费解的却是为什么凯恩斯先生的神秘的逻辑关系应该服从它们。我们竟然会如此奇怪地不知道这些关系的事例，而又如此奇怪地知道它们的普遍法则。
>
> 其次，无差别原则现在可以被彻底地摒弃掉了……能够把无差别原则驱逐出形式逻辑是一个极大的优点；因为正如凯恩斯先生所尝试的那样，显然完全不可能为它的有效性设定纯逻辑条件。
>
> (Ramsey, 1926: 188 - 189)

然而，这里仍然遗留下几个与主观理论相关的问题，尤其是以下问题，即根

据这种进路，如何能解释那些看起来是客观的概率，例如铀元素的某种同位素在一年内发生衰变的概率。德·菲耐蒂通过引入**“可交换性”**（exchangeability）概念来处理这个问题，我在后面会对此作出说明。不过，在继续这个话题之前，有一个问题很可能会引起数学研究者们的兴趣。当今几乎所有对数学概率论的高深论述都是以柯尔莫哥洛夫公理（Kolmogorov axioms）为依据的（参见 Kolmogorov，1933）。前面所给出的公理当然是类似于柯尔莫哥洛夫公理的，但还是有一两点差别。看来确实值得细察它们与数学上标准的处理方式之间的这些分歧，从而明白它们所具有的意义。总的来讲，在本书中，我的目的在于讨论概率的哲学方面，因而尽可能少地用到数学，其实也只不过是用到了相当初等的代数学。然而，有时候，正如在这个问题上，如果所讨论的问题涉及关于那些用以研究概率的较为高级的数学方法（随机变量、测度论、分析等等）的知识，使用数学会对讨论有所帮助。我的计划是把这些讨论放在标有星号的各节，这样的安排既可以让数学研究者们读到它们，也可以让不研究数学的人略过它们而不至于抓不住论证的主要思路。

第三节　本章所论及的公理系统与柯尔莫哥洛夫公理的比较*

德·菲耐蒂把概率指派给事件 E，F，…，这些事件包括了我们用 Ω 来表示的确定事件。在柯尔莫哥洛夫的数学进路中，概率被指派给某一集合 Ω 的各相关子集。这一点在我看来并不是重要的区别，因为相当容易就能把德·菲耐蒂的处理方式映入集合论的语言。一个较为重大的分歧出现在他们处理条件概率的方式上。柯尔莫哥洛夫是借助定义来引入条件概率的（参见 Kolmogorov，1933：6），因而有以下定义

$$\text{对于 } P(\mathrm{F})\neq 0,\ P(\mathrm{E}\mid \mathrm{F}) = \mathrm{def}\ \frac{P(\mathrm{E}\&\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})}$$

柯尔莫哥洛夫随后在其专著（Kolmogorov，1933：Chapter V）中也对“$P(\mathrm{F})=0$”的情况作了探讨。这样，在柯尔莫哥洛夫的处理方式中，一种相等关系通过定义而得以确立，但在我们前面所给出的处理方式中，这种相等关系是一条需要复杂的证明的基本公理（公理 3），其实也就是概率的乘法律。

事实上，这种做法——即基本假定以定义的形式出现——在数学中并不鲜见，但在我看来却不是一种很好的做法。我认为，比较好的做法是，把重要的假定确定为公理（或作为定理导出），并设法尽可能地仅仅把定义作为缩写。这使

得我在这点上倾向于采纳德·菲耐蒂的而非柯尔莫哥洛夫的处理方式。这意味着要把 $P(E|F)$ 看做公理系统中的一个初始的（未加定义的）词项，并借助一个公理来刻画它，而不是通过显定义来引入它。

显然，对于主观理论来说，德·菲耐蒂的进路更为自然，因为条件概率可以作为定义在一个特定的打赌方案上的条件赌商被引入。不过，我们决不能明显地看出这些条件赌商是服从我们的公理 3 的；实际上，这方面的证明是相当冗长的。此外，类似的考量也适用于其他的概率解释。在第三章我们已经看到，“h 相对于 e 的条件概率”这一概念在逻辑理论的框架内是一个初始的和基本的概念。因此，像凯恩斯所做的那样，把它作为某一公理系统中的一个初始概念看来是自然的。我们将会在第五章和第六章看到，“条件概率”概念在频率解释和倾向解释中也同样是初始的。在这点上，我站在德·菲耐蒂而非柯尔莫哥洛夫一边，我赞同借助公理而非定义来引入条件概率。再说，公理化的处理方式造就了概率的加法律和乘法律之间的一种相当优美的对称性。

德·菲耐蒂和柯尔莫哥洛夫之间的另一处重要差异涉及关于有限可加性与可列可加性的问题。正如我们所见，德·菲耐蒂的公理2（加法律）可以被等值地表述为这样的形式：如果 E_1，…，E_n 是互斥事件，

$$P(E_1 \vee \cdots \vee E_n) = P(E_1) + \cdots + P(E_n)$$

现在问题在于，我们是否能够把加法律从涉及有限的量的场合推广到涉及可列无限的量的场合，也就是说，我们是否能够合法地从有限可加性推出可列可加性。这就需要采用以下的加法律的更强形式作为公理了。

适用于可列可加性的加法律：如果 E_1，…，E_n，…是由互斥事件所组成的一个可列无限序列，那么

$$P(E_1 \vee \cdots \vee E_n \vee \cdots) = P(E_1) + \cdots + P(E_n) + \cdots$$

柯尔莫哥洛夫对这个问题的处理很有意思。在其专著的第一章，他只认可有限可加性。可是在第二章，他在其先前五条公理的基础上增加了第六条公理（连续性公理），它等值于上述适用于可列可加性的加法律。然而，柯尔莫哥洛夫似乎对他的这条公理还有一些保留，因为他说道：

> 由于这条新公理仅仅对于概率的无限域（infinite field）是必不可少的，因此，要想像先前对第一章第二节的公理 I 至公理 V 那样，对它的经验意义

> 作出阐述，几乎是不可能的。因为在对任何可观察的随机过程进行描述时，我们所能得到的只是概率的有限域（finite field）。概率的无限域只作为真实随机过程的理想模型出现。**我们凭主观硬性地把自己仅仅限定在那些满足公理VI的模型上。**这种限定已被发现对于各种不同类型的研究都是有助益的。
>
> （Kolmogorov，1933：15）

柯尔莫哥洛夫在这里认为，虽然可列可加性超越了在经验上能被核实的范围，但是它对整个研究领域的实用性使它的被采纳得到了辩护。

对于可列可加性，德·菲耐蒂有着和柯尔莫哥洛夫一样的顾虑，但他却把这些顾虑视为要把探讨限定在有限可加的领域的一个原因。[6]因此，他说道：

> （可列可加性假定）是目前最被广泛接受的一个假定；它在柯尔莫哥洛夫公理（1933）中得到了系统化的表述，即使它不是来源于此。它的成功在很大程度上要归功于把概率演算仅仅变为现代测度论的一种转译在数学上所带来的便利……没人对可列可加性给出过一个真正的辩护（除了只是把它作为有限可加性的一个“自然的推广”）。
>
> （de Finetti，1970：Vol. 1，119）

然而，德·菲耐蒂认为，人们不应该仅仅以数学上的便利为由引入新的公理，除非这些公理能够在概率的意义方面得到辩护。目前，主观理论是根据个人的赌商来指派概率的。一个特定的人总是在有限个事件上下注打赌，而在无限个事件上下注打赌则是难以想象的。这样看来主观理论似乎在为有限可加性而非可列可加性辩护。德·菲耐蒂还给出了其他的一些支持有限可加性、反对可列可加性的论点。下面我们会再考虑其中的一个。

如果我们认可可列可加性，那么，要在一个可列集——例如，正整数集 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ ——上有一个均匀分布就变得不可能了。因为假设对于所有 i，我们让 $P(i)=p$。如果 $p>0$，那么 $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)+\cdots$ 就变得无限大了，而根据概率公理它应该小于等于1。如果对于所有 i，我们让 $P(i)=0$，那么，根据可列可加性，$P(\{1, 2, \cdots, n, \cdots\})=P(1)+P(2)+\cdots+P(n)+\cdots=0$，可是，根据公理1，$P(\{1, 2, \cdots, n, \cdots\})=P(\Omega)=1$。不过，如果我们只是认可有限可加性，那么便防止了这个论点后半部分所说的情况的发生，从而使得在正整数集上有一个均匀分布成为可能。由于可列可加性公理使我们不可能有这样的一类均匀分布，所以德·菲耐蒂把这视为可列可加性公理的一个反直觉的特征。对于任何有限的 n，无论多大，通过设定 $P(i)=1/n$，$i=1, \cdots, n$，

我们终究能够在正整数1，2，…，n上引入一个均匀分布。然而，如果我们假定在无限的正整数群集（collection）1，2，…，n，…上可列可加性成立，我们就只能得出他所谓的“极不平衡的划分”（extremely unbalanced partitions）（de Finetti，1970：Vol. 1，122）。后来他在别处更为详细地解释了他在这里所表达的意思，他是这样说的：可列可加性“迫使我去选择它们（亦即正被讨论的可列类，例如正整数——作者注）中的某个有限的子集，我所赋予这一子集的概率总计至少达到99%（而留下1%给其余的子集；我本来还可以说赋予99.999%而只剩下0.001%，或者甚至说得更为极端一些）”（de Finetti，1970：Vol. 2，351）。这一论点也许与先前的那个论点不是十分协调，因为先前的那个论点表明，根据主观进路，人们应该总是把自己限定在有限的事件群集上，而根本就不应该考虑可列集上的概率分布。

并非所有的概率论家都同意德·菲耐蒂在主观理论的框架内对可列可加性的态度。亚当斯（E. Adams）（Adams，1964）提出了一个证明，表明可列可加性的确可以从主观进路的那些假定中推导出来。威廉森（J. O. D. Williamson）（Williamson，1999）对这个证明作了相当大的简化，而且还讨论了一些相关的哲学问题。他设计了一个打赌情境，在这个情境中，在可列个事件上下注打赌看起来是颇为合理的。假设A女士告诉B先生，在隔壁房间的一个密封的包裹里有一份电脑打印出来的文件，文件上印有一个正整数，于是，对于所有n，A女士要求B先生给出他对这个数字是某个数字n的赌商。当然，B先生有可能意识到，实际的技术问题必定是给这个隐藏着的数字的取值范围设定某个上限。然而，这个上限是难以确定的，而且这是一个完全没有确切答案的问题。对于B先生来说，不那么费力的做法则是提出一个无限的赌商序列，而不是确定一个特定的上限。实际上，正是由于这样的一类原因，无限的东西才经常被引进到应用数学中来。

这个例子值得注意的一个地方在于，它表明了一个均匀分布是极不似真的。另一方面，我们会预料小的数字比非常大的数字更有可能出现。一般说来，在任何我们要借助无限的量（the infinite）来近似地估计没有预期上限的巨大的有限的量（the large open-ended finite）的打赌情境中，德·菲耐蒂所描述的那些不平衡的分布根本就不是反直觉的，反而正是我们所期望的。

威廉森的另一个观点是，一旦我们引入了一种适合于可列无限个事件的打赌方案，则只需一个额外的条件，再借助与德·菲耐蒂用在有限可加性上的大弃赌论证完全一样的论证，就可以导出可列可加性公理。这个额外的条件就是，支付给对方的只能是有限数额的金钱。

在假定这个条件成立的基础上，如果我们以可列无限个事件E_1，…，E_n，…

替换有限个事件 E_1，…，E_n，那么让我们来看看公理 2 的证明必须作出怎样的修正。由于支付给对方的只能是有限数额的金钱，所以 A 女士的收益 G_i 必定全部都是有限的，因而这意味着序列 $q_1S_1 + \cdots + q_nS_n + \cdots$ 必定收敛。此外，从公理 1 可以推导出 $q_1 + \cdots + q_n + \cdots \leqslant 1$。如果在前面所给出的公理 2 的证明中，我们把有限的钱款替换为无限的序列，那么，根据上述的这些结论，所有的序列收敛，相关的证明因而还是会像先前那样获得认可。因此，如果我们允许在可列无限个事件上下注打赌（这在上面所描述的那种情境中看起来是非常合理的），并且，如果我们明确规定支付给对方的只能是有限数额的金钱（这简直就是不可避免的），那么可列可加性公理就会从与德·菲耐蒂用于确立有限可加性的大弃赌论证完全相同的论证中严格地推导出来。威廉森的这个论点在我看来表明了可列可加性在主观理论的框架内完全可以得到辩护，德·菲耐蒂对它的否定是不正确的。

在我看来，这个结论是加强了而不是削弱了主观理论。按照德·菲耐蒂的思路，那些采纳概率的主观理论的数学家所使用的数学理论必须在一定程度上有别于标准的理论。想必很多人都会认为这是一个可以用来反对成为主观主义者的理由。威廉森的论点表明，这样的疑虑是相当不必要的，完全可以既当主观主义者又使用标准的数学理论。此外，正如威廉森所指出的，与逻辑理论相对比，可列可加性使主观理论得到了增强。假设我们正在对一个由事件 E_1，E_2，…，E_n，…所构成的可列无限序列下注打赌，又假设对于所有 i，j，我们没有理由偏爱 E_i 而非 E_j，这样看来，根据其无差别原则，逻辑理论似乎要有赖于一个均匀分布。但可列可加性迫使我们接受一个偏态分布，不仅使得逻辑解释在这里没有用武之地，而且还由此引入了主观因素。因此，具有讽刺意味的是，德·菲耐蒂对均匀分布的捍卫，在这个语境之下，与其说是在捍卫他本人的主观进路，不如说是在捍卫逻辑观点。

第四节　主观理论中的似客观概率：可交换性

到目前为止，主观理论已经取得了相当大的成就。以把概率视为个人的置信度作为分析的起点，它已经表明了这样的置信度是如何能够得到测度的，以及概率的标准数学公理又是如何能够从简明的和似真的一贯性条件中推导出来的。这一切都无可置疑地证明了主观概率至少是数学演算的有效解释之一。此外，还有一些场合，在这些场合中概率的主观分析看上去都是极为似真的。比方说，明天下雨的概率、某个政党将赢得下次选举的概率或者某匹马在一场赛马中胜出的概率就都是例证。这样的一些概率可以被似真地说成是主观的，或者说至少是包含

了相当多的主观成分。然而，也存在着其他的一些概率，它们看起来——起码乍看起来——完全像是客观的。假设我们有一颗骰子，多次的精心检验表明，它在物理构造上是相当匀称的，而且在一系列试验中，它每一面朝上的频率都是大致相同的。对于这样的一颗骰子，肯定是 $P(5)=1/6$，这是一个客观事实，而不是一个关于主观意见的问题。接下来再来考虑一下铀元素的某种同位素在一年内发生衰变的概率。这肯定不是一个见仁见智的问题，而是可以根据物理教科书上明确规定的量值计算出来的。这样的一个概率看上去完全跟——例如——同位素的质量一样客观。概率的主观理论的支持者会怎样处理这类情况呢？

实际上有两种可能的处理方式。一种方式是，承认我们所列举的例子以及同类的事例确实都是客观的，从而承认至少存在着两种不同的概率概念，它们适用于不同的场合。这是拉姆齐（Ramsey，1926）所持的立场，我将在第八章对它作出讨论。然而，另一种方式是，声称所有概率都是主观的，甚至像刚才所描述的那些看似客观的概率也能从主观置信度的角度加以阐释。这是德·菲耐蒂所采用的方式，接下来我将详细考虑他的论点。

德·菲耐蒂对相关问题作了以下陈述：

> 不难承认，唯有主观主义的阐释才适用于实际预测（运动结果、气象事实、政治事件等等）的场合，但实际预测一般不会被放在概率论的框架内，即使对概率论作最广义的解释，在其框架内通常也不会有实际预测的位置。另一方面，可能让人较难同意的是，正是这种说明实际上为在某些传统领域内被认为属于概率概念的那种较为科学和深刻的价值提供了理论基础。
>
> （de Finetti，1937：152）

尽管如此，但德·菲耐蒂的确认为概率的主观说明甚至在这些“传统领域”内也是恰当的，因为他继续说道：

> 我们的观点在所有场合都是始终如一的：那就是要表明，有一些相当深刻的心理方面的原因可以十分自然地解释那种在不同的人的意见之间被观察到的精确的或近似的一致性，而无论是理性方面的、实证方面的还是形而上方面的原因都不能够使这个事实有除主观意见的简单一致性这个意义以外的任何意义。
>
> （de Finetti，1937：152）

现在让我们举一个简单的例子，看看德·菲耐蒂是如何证明这种观点是切实可行

的。假设我们有一枚硬币，已知它是有偏向性的，但不知其重心的偏斜程度是多少。客观主义者会说，硬币落下后正面朝上存在着一个真实却未知的概率 p，我们可以通过抛掷这枚硬币 n 次（n 要很大），从中观察硬币落下后正面朝上的次数 r，进而确定 $p \approx r/n$，以求实现对 p 的粗略测度。p 和 r/n 之间的确切关系将取决于被采纳的那种客观理论。

那么，像德·菲耐蒂那样的主观主义者又是怎样处理这种情况的呢？第一步就是，考察一个由我们假设的那枚硬币的各次抛掷所构成的序列，这个序列给出的诸结果是：E_1，…，E_n，…，其中每一个 E_i 要么是正面朝上（H_i）要么是反面朝上（T_i）。由此，H_{n+1} = 在第 $n+1$ 次抛掷中出现正面朝上，这一点需要特别指出。此外，令 e 表示对前 n 次抛掷结果的一个完全的具体说明，这是一个 n 位长的序列，在该序列的第 i 位，我们要么有 H_i 要么有 T_i。假设在前 n 次抛掷中正面朝上出现了 r 次。主观主义者的方法是计算 $P(H_{n+1} \mid e)$，从而表明，在稍后我们会明确规定的某些一般性条件下，当 n 很大时，$P(H_{n+1} \mid e)$ 趋向于 r/n。这表明，无论验前概率 $P(H_{n+1})$ 被指派什么值，当 n 很大时，验后概率 $P(H_{n+1} \mid e)$ 都会趋向于被观察到的频率。可见，虽然不同的人最初可能持有分歧很大的意见，但如果他们通过贝叶斯条件化改变他们的概率，那么他们就会在其验后概率上达成共识。客观主义者对此作了不正确的解释，误以为这表明存在着一个客观概率，而按照德·菲耐蒂的看法，“客观概率”是一个毫无意义的形而上学概念。实际的情况就是，根据证据，不同的人在他们的主观概率方面正在趋于一致。以上就是德·菲耐蒂的论点了。现在就让我们在我们的简单例子中给出支持该论点的数学证明。

假设对于所有 i，$P(E_i) \neq 0$，因而相应地 $P(e) \neq 0$。于是，根据公理 3，我们有

$$P(H_{n+1} \mid e) = \frac{P(H_{n+1} \& e)}{P(e)} \tag{4.3}$$

接下来，我们引入**可交换性**条件（the condition of exchangeability）。假设 B 先生正在进行一个验前的打赌，他赌有一些结果会构成一个特定的 n 元组（比方说，$E_{i1}E_{i2}\cdots E_{in}$）。再进一步假设，正面朝上在这个 n 元组中出现了 r 次。如果 B 先生也指派了相同的赌商给诸结果的其他任何一个正面朝上也为 r 次的特定的 n 元组（在此 n 与 r 二者的取值可以选择任何有限的非负整数并且 $r \leqslant n$），那么他那些赌商就被认为是**可交换的**（exchangeable）。让我们把他对“正面朝上在 n 次抛掷中将出现 r 次”的验前概率（或者说赌商）记作 $\omega_r^{(n)}$。正面朝上能以 C_n^r 种不同

的方式在 n 次抛掷中出现 r 次，在这里，照例有 $C_n^r = n!\ /[(n-r)!\ r!] = n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)/r(r-1)\cdot\cdots\cdot1$。依据可交换性，每一个相应的 n 元组都必须被指派相同的概率，亦即 $\omega_r^{(n)}/C_n^r$。因此，

$$P(E_{i1}E_{i2}\cdots E_{in}) = \frac{\omega_r^{(n)}}{C_n^r} \tag{4.4}$$

按照定义，e 正好是诸结果中的一个正面朝上为 r 次的特定的 n 元组。这样，依据可交换性，

$$P(e) = P(E_{i1}E_{i2}\cdots E_{in}) = \frac{\omega_r^{(n)}}{C_n^r} \tag{4.5}$$

那么 $H_{n+1}\&e$ 就是诸结果的一个正面朝上在其中出现了 $r+1$ 次的 $n+1$ 元组。这样，依据相同的论点，

$$P(H_{n+1}\&e) = \frac{\omega_{r+1}^{(n+1)}}{C_{n+1}^{r+1}} \tag{4.6}$$

那么，通过对式 4.3 进行替换，我们可得

$$\begin{aligned}P(H_{n+1}\mid e) &= \frac{C_n^r\ \omega_{r+1}^{(n+1)}}{C_{n+1}^{r+1}\ \omega_r^{(n)}}\\ &= \frac{n!\ (r+1)!\ (n-r)!\ \omega_{r+1}^{(n+1)}}{(n-r)!\ r!\ (n+1)!\ \omega_r^{(n)}}\\ &= \frac{r+1\,\omega_{r+1}^{(n+1)}}{n+1\ \ \omega_r^{(n)}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

式 4.7 给出了我们想要的结果。只要当 $n\to\infty$ 时 $\omega_{r+1}^{(n+1)}/\omega_r^{(n)}\to1$（一个非常似真的要求），我们就可以以我们所喜欢的任何方式去选择我们的验前概率 $\omega_r^{(n)}$，还可以得出：当 $n\to\infty$ 时 $P(H_{n+1}\mid e)\to r/n$（那个被观察到的频率），这正是所求的结果。

下面是对此所作的概括：在客观主义者看来，正面朝上存在着一个真实的客观概率 p，当 $n\to\infty$ 时，被观察到的频率 r/n 会对 p 作出越来越精确的估计。

在主观主义者看来，“真实的客观概率 p”是一个形而上学的幻想。不同的人可以有不同的验前概率 $P(H_{n+1})$，只要服从一贯性。然而，一贯性 + 可交换性 + 另一个似真的假定（当 $n\to\infty$ 时 $\omega_{r+1}^{(n+1)}/\omega_r^{(n)}\to 1$）就确保了当 $n\to\infty$ 时 $P(H_{n+1}\mid e)\to r/n$。因此，随着证据的积累，在验前存有分歧的人们将会在验后达成一致。正是这种“在不同的人的意见之间的精确的或近似的一致性，出于相当深刻的心理方面的原因”使人产生了以为客观概率存在的错觉。

在 n 次抛掷中，正面朝上的次数可以是 0，1，2，…，n。因此，根据一贯性，

$$\omega_0^{(n)}+\omega_1^{(n)}+\omega_2^{(n)}+\cdots+\omega_r^{(n)}+\cdots+\omega_n^{(n)}=1 \qquad (4.8)$$

在主观理论的框架内，我们只需遵循式 4.8，就可以随意地选定 $\omega_r^{(n)}$（验前概率）。然而，我们也可以借助“无差别原则”来确定它们的取值，但这并不是强制的，从而使得它们全部相等，因此

$$\omega_0^{(n)}=\omega_1^{(n)}=\omega_2^{(n)}=\cdots=\omega_r^{(n)}=\cdots=\omega_n^{(n)}=1/(n+1) \qquad (4.9)$$

通过对式 4.7 作出替换，我们可得

$$P(H_{n+1}\mid e)=\frac{r+1}{n+2} \qquad (4.10)$$

这是古典理论的一个结论——拉普拉斯接续规则（Laplace's Rule of Succession）。

接续规则曾被尝试用于解决休谟的归纳问题。假设我们看了休谟的论证，就会对明天太阳是否升起感到忧心。目前看来，有文字记载的历史起码可以追溯到 5000 年前，而在所有的这些日子里，太阳（在恰当的纬度地区）被观察到每天早上都会升起。至少，我们可以合理地推测，如果某天早上太阳是没有升起的，那么这个事实就已经被记录下来了。因此我们的证据是，在过去的 1826250 天里，太阳每天早上都升起。为了计算它明天升起的概率，我们使用式 4.10，并代入 $r=n=1826250$。于是得出太阳明天升起的概率大约是 0.9999994。如果这个推理是正确的，那么我们就应该不再被休谟式的疑虑所烦扰，并且能够满怀信心地期待太阳明天升起！

但是，并非每个人都对这个论证表示信服，而且接续规则一直以来都受到了相当多的严厉批评。我在这里会叙述一种批评意见，它以波普尔提出的一个例子为基础。[7]假设在一个夏天的早上，伦敦的居民一觉醒来发现，尽管按照他们的

时钟现在应该是白天，但事实上户外仍然是黑夜。于是他们打开他们的收音机和电视机，并由此得知发生了相当不同寻常的事情。地球似乎已经停止了转动。现在伦敦仍然是晚上，而在地球的另一端，太阳却固定地停留在了天空的某个位置上。当然了，这在相当大的程度上违背了所有已知的物理学定律。此外，除了表面上太阳的运转发生了不可思议的改变，其他所有的事物还是一如既往地维持原样，这样的一种情形又再次违背了所有已知的物理学定律。世界各地的科学家都承认他们对此感到困惑，不能理解正在发生的事情。而休谟的哲学著作此时正处于热卖中。

若考虑到这种奇异的但能想象得到的境况，那么，明天早上太阳像往常一样再次升起的概率又是多少呢？这根据接续规则是很容易计算出来的。在上面的式4.10中，我们现在有 $r = n - 1$，$n = 1826251$。因此，明天太阳升起的概率为0.9999989。换句话说，如果我们信守接续规则，那么刚才所描述的那些相当异常的事件就会使明天太阳升起的概率降低0.0000005，亦即 5×10^{-7}。很明显，这是相当错误的。因为，有可能人们都处于一种惶惑的状态，以至于没人对于明天太阳是否升起有一点点头绪，所以毫无疑问，没人会给明天太阳升起指派0.9999989的概率。这个例子表明，尽管接续规则在某些场合可以给出合理的答案，但它在别的场合也有可能给出荒谬的答案，因而大体说来，它不能被认为是有效的。另一方面，现在尚未弄清楚的是，上述那个导出接续规则的相当令人信服的推理链条的确切失误究竟出现在哪里。我首先会对德·菲耐蒂从可交换性的角度对明显的客观性所作的分析提出一个总体的批评，而不是立刻对这个问题展开深入的探究。正如我接下来将表明的，这个批评可以使人了解为什么接续规则在某些场合会如此戏剧性地失效。

为了说明我对德·菲耐蒂的可交换性论点的批评，一开始我会引述一个重要的文段，那是他对这个论点的若干总体特征所作的描述。我接下来要批评的恰好就是这些特征。该文段如下：

> 无论观察对那些关于未来的预测所施加的影响是什么，它都决不蕴涵也决不表示：我们在概率 $P(E_{n+1})$ 遭到经验的否证之后纠正了原本对它的评估，并代之以另一个概率 $P^*(E_{n+1})$，因为后者与经验相符合因而可能**更为接近真实的概率**；恰恰相反，它仅仅在以下意义上得到体现，那就是：当经验告诉我们前 n 次试验的结果为 A 时，我们的判断不再表达为概率 $P(E_{n+1})$，而是表达为概率 $P(E_{n+1} \mid A)$，即当我们把结果 A 视为事件 E_{n+1} 的条件时我们的初始意见就已经赋予该事件的概率。这个初始意见没有什么被驳斥或被纠正；事实上不是函项 P 被更改（被另一个函项 P^* 代替），而是

变目 E_{n+1} 被替换为 $E_{n+1} \mid A$，这正是保持了对于我们最初的意见的忠实性（这体现在对函项 P 的选择上），也是保持了我们在判断方面的一贯性，即当已知情况发生变化时我们的预测也随之改变。

同理，正如在一次共有 10000 张彩票的抽彩中，某人抽到了一张号码为 2374 的彩票，他一开始赋予赢得头奖一个 1/10000 的概率，但在他亲眼目睹筹码被逐个抽出直至最后依次组成——比方说——2379 这个号码的过程中，他对那个概率的评估按顺序分别是 1/1000，1/100，1/10，0。在每一个时刻，他的判断都是完全一贯的，并且在每抽出一个筹码后，他没有理由说前边的概率评估（在它被作出的时候）是不正确的。

（de Finetti，1937：146 - 147）

这段文字非常清楚地说出了德·菲耐蒂的立场和客观主义者——尤其是有波普尔式倾向的客观主义者——的立场之间的差异。在这样的客观主义者看来，对一个概率函项所作的任何评估 P 都只是一种关于真实的客观概率值的猜想，而且，像任何猜想一样，它应该受到严峻的检验。如果这些检验表明它无论如何都是不恰当的，那么它就应该被一个更好地符合事实的新猜想 P^* 所取代。在德·菲耐蒂的方案中，我们不试图检验或反驳我们的验前概率 $P(E_{n+1})$，而只是通过贝叶斯条件化把它们转变为验后概率 $P(E_{n+1} \mid A)$。不同的人开始时可以有不同的验前概率，但随着证据的逐渐增加，他们的验后概率在许多情况下都会倾向于收敛，从而产生了客观概率存在的错觉。

我反对德·菲耐蒂的理由大致如下。在所有场合中，验前概率函项 P 都建基于对所研究情境之本质的一般假设之上。如果这些假设大体上是正确的，那么，德·菲耐蒂按照贝叶斯条件化来改进 P 的方案将得出合理的结果。然而，如果初始假设在某些方面是严重错误的，那么，不仅验前概率函项是不恰当的，而且由它根据证据所得出的所有条件概率也是不恰当的。为了能在这样的情况下得出合理的概率，我们有必要以一种比德·菲耐蒂所允许的要剧烈得多的方式来改变 P，这样做实际上就是引入一个新的概率函项 P^*。这一思路可以这样概括：德·菲耐蒂所允许的仅仅通过贝叶斯条件化来作出改变的方案是太保守了；有时，为了取得进步，对 P 作出比他所允许的要剧烈得多的改变也是必需的。我马上就会给出一个关于这样一种情况的例子。然而，为了说明这个例子的总体特征，对独立性和可交换性这两个概念之间的关系作一番细察是合乎需要的。由于这涉及一些技术细节，所以我会在下节讨论相关的问题。在再接下来的一节我会先对它上一节的要点作一个非形式化的概括，然后才给出我的一个关于某种情况的例子，在这种情况下，德·菲耐蒂仅仅通过贝叶斯条件化来改变验前概率的方

法被证明是不恰当的。

第五节　独立性与可交换性的关系*

在某种意义上，“可交换性”概念在主观理论的框架内是客观主义者的“独立性”概念的等价物。但这并不意味着“独立性”概念不适用于主观理论。对于两个事件 E，F，如果 $P(E\&F)=P(E)P(F)$，则它们被定义为独立的。即使相关的概率被赋予一种主观意义，这个定义也肯定适用。可是问题在于，独立性假定在客观进路中是一个适用于很多场合的非常重要的假定，而独立性在主观意义上却只是一个几乎从来都不会被人作出的假定。如果我们在数学上作出独立性假定，并且赋予概率一种认识论意义，那么结果会导致某种情形的出现，在这种情形下不能实现从经验中学习。通过探究，如果我们把可交换性假定变为独立性假定会有什么后果，我们就能够在主观理论的语境中看出这一点。这等于假定

$$P(E_{i1}\&E_{i2}\&\cdots\&E_{in})=P(E_{i1})P(E_{i2})\cdots P(E_{in})$$

尤其是，这会导出 $P(H_{n+1}\&e)=P(H_{n+1})P(e)$。以此对前面的式 4.3 作出替换，我们得到

$$P(H_{n+1}\mid e)=P(H_{n+1})$$

可见，在贝叶斯的框架内不能实现从经验中学习。德·菲耐蒂肯定在其主观理论发展的初期就已经意识到了这一点，因为他写道：

> 如果先前的试验结果能够修正我的意见，那么在我看来它就是相依的而不是独立的……如果我承认存在着为了回应对于频率的观察而修正我的概率判断的可能性，这意味着——依据定义——我对某一次试验的概率的判断不是独立于其他试验的结果的。
>
> (de Finetti，1931a：212)

总的说来，像我们的 B 先生那样的人都希望修正他的概率判断以作为对观察到的频率的回应，因而结果就是极少人会在主观理论的框架内作出独立性假定。乍看起来，这对主观进路似乎是一个颇为沉重的打击，因为客观主义者们经常成功地作出独立性假定。这无疑是一个促使德·菲耐蒂构想出“可交换性”

这个新概念的因素。粗略地说，凡是客观主义者假定独立性的地方，主观主义者就假定可交换性。德·菲耐蒂证明了一个一般性的定理，表明这两个概念是如何相联系的。接下来我就对他的结论作出说明。

首先，让我们为随机变量［或者说是随机量（random quantity），德·菲耐蒂比较喜欢这样称呼它们］的一个序列 X_1，…，X_n，…定义可交换性。如果对于任何确定的 n，不管对 $i1$，…，in 作出怎样的选择，X_{i1}，X_{i2}，…，X_{in}都有相同的联合分布，那么这些随机量就是可交换的。现在令 Y_n 为任何 n 个随机量 X_i 的平均值，即 $Y_n = (1/n)\ (X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{in})$，因为我们正在探讨的是可交换的随机量，所以选择 $i1$，$i2$，…，in 中的哪一个都是无所谓的。德·菲耐蒂（de Finetti，1937：126）首先表明：当 $n \to \infty$ 时，$\Phi_n(\xi) = P(Y_n \leqslant \xi)$ 这个分布趋向于一个极限 $\Phi(\xi)$，也许间断点除外。他接着说道：

> 的确，如果令 $P_\xi(\mathrm{E})$ 为当 E_1，E_2，…，E_n，…被看做独立的和具有概率 ξ 的等概事件时赋予一般事件 E 的概率，那么，若 E_i 是具有极限分布 $\Phi(\xi)$ 的可交换事件，则同一个一般事件的概率 $P(\mathrm{E})$ 就是
>
> $$P(\mathrm{E}) = \int_0^1 P_\xi(\mathrm{E})\,\mathrm{d}\Phi(\xi)$$
>
> 这个事实可以被表述为：相应于可交换事件方面的概率分布 P 是相应于独立等概事件方面的概率分布 P_ξ 的线性组合，而 $\Phi(\xi)$ 则表示线性组合中的权。
>
> (de Finetti，1937：128－129)

我们可以举一两个特殊的事例来阐明这个一般性的结论。假设我们正在讨论一个关于抛掷硬币的例子，相关的一般事件 E 是：正面朝上在 n 次抛掷中出现了 r 次。那么

$$P_\xi(\mathrm{E}) = C_n^r \xi^r\ (1-\xi)^{n-r}$$

因此

$$P(\mathrm{E}) = \omega_r^{(n)} = C_n^r \int_0^1 \xi^r\ (1-\xi)^{n-r}\mathrm{d}\Phi(\xi)$$

尤其是，当 $\Phi(\xi)$ 为均匀分布时，我们有

$$\begin{aligned}\omega_r^{(n)} &= C_n^r\int_0^1\xi^r(1-\xi)^{n-r}\mathrm{d}\xi\\ &= C_n^r\mathrm{B}(r+1,n-r+1)\text{，其中 B 是 Beta 函数}\\ &= \frac{1}{n+1}\text{（请比较前面的式 4.9）}\end{aligned}$$

只要把这些结果与我们之前涉及可交换性的计算比较一下，我们就可以看出可交换性与独立性是如何相关联的。

德·菲耐蒂把这些数学方面的结论解释为：它们表明了我们可以**消除**客观概率和独立性这两个概念（在他看来它们具有形而上学的性质）而以主观概率和可交换性这两个概念作为替代。另一方面，我们也可以认为他那些结论所体现的是一种归约，即把客观概率和独立性归约为主观概率和可交换性。这个构想是，当客观主义者假定独立性并列出相应的数学表达式的时候，主观主义者也完全能够把这些表达式重新解释为关于主观概率和可交换性的。这样的解释消除了客观主义者的形而上学的概念，也赋予了相关的表达式真正的经验意义。我把这个论点称为**德·菲耐蒂的可交换性归约**，我会在下一节对它作出批评。

第六节　对德·菲耐蒂的可交换性归约的批评

上一节已经表明，可交换性在某种意义上是客观独立性的主观等价物。德·菲耐蒂认为这意味着我们可以消除客观主义者的“独立性”概念而代之以“可交换性”。然而，从客观主义者的观点来看，这个关系——可以说——能够从相反的角度被理解为：只有**当相关的情况在客观上具有独立性的时候**，我们才能够运用可交换性。不过，并非所有事件序列都是独立的。恰恰相反，很多时候一个特定事件的结果会非常强地依赖于先前那些事件的结果。在这样的一些情况下，我们可以预料，对可交换性的使用以及前面有所说明的那些涉及它的计算会给出全然错误的结果。事实的确如此，我马上会举例说明这一点。我的结论是，我们根本就不能够把“客观独立性”概念归约为“可交换性”概念，实际上“可交换性”概念是寄生于“客观独立性”概念的，因而是多余的。为了能以一种不会导致不正确的和使人误解的结果的方式使用可交换性，我们首先就得确保相关的情况在客观上是具有独立性的。我们要想坚信确实做到这一点，就只能是猜想这种情况是具有独立性的并对这个假定加以严格的检验。如果我们的猜想通过了

这些检验，那么我们便可以基本正确地使用涉及可交换性的计算方法，但其实无须这样做，因为我们可以使用独立性和客观概率，以标准的方式来处理这个问题。那么，在这种情形中，可交换性就是不必要的了。另一方面，如果我们的检验表明该情况不具有独立性，那么使用可交换性就会得出误导人的结果，这是应该避免的。因此，在这两种情形中都不存在任何可以使用可交换性的理由。

为了阐明这个论点，我们可以使用由相依的而非独立的事件构成的任何序列。我已经挑选了一个很简单但同时又很引人瞩目的关于独立性的例子。这就是"红或蓝"游戏（game of red or blue）。[8]在这个游戏的每一轮都有一个数 s，s 的大小是由先前那些结果所决定的。我们抛掷一枚匀称的硬币，如果结果是正面朝上，我们就把 s 改为 $s'=s+1$，而如果结果是反面朝上，我们就把 s 改为 $s'=s-1$。如果 $s'\geq 0$，该轮的结果就被称为"蓝"，而如果 $s'<0$，该轮的结果就被称为"红"。因此，尽管这个游戏是建基于抛掷硬币的，但其结果却是一个由"红"和"蓝"构成的序列，而不是一个由"正面朝上"和"反面朝上"构成的序列。此外，虽然"正面朝上"和"反面朝上"的那个序列是独立的，但"红"和"蓝"的那个序列却是高度相依的。我们可以料想，"蓝"接连不断地出现的次数远远要多于抛掷硬币时"正面朝上"接连不断地出现的次数。如果我们以 $s=0$ 开始这个游戏，那会略微有利于"蓝"，因为这样"蓝"便处在了起始的位置上。然而，这种偏向性是很容易消除的，那就是，靠抛掷硬币来决定 s 的初始值。如果掷出正面朝上，我们把 s 的初始值设定为0，而如果掷出反面朝上，我们便把它设定为 -1。这使得"红"和"蓝"恰好是对称的，以至于"蓝"的极限频率必定与"红"的相同，因而等于1/2。因此，令人惊奇的是，重复进行该游戏的次数即便超过了某个极为庞大的数目，但其中一种颜色还是很有可能远远要比另一种出现得频繁。费勒（W. Feller）（Feller，1950：82－83）给出了一些关于该游戏的这些不寻常的特征的例子。例如，假设这个游戏在一年中每隔一秒就进行一次，亦即重复进行了31536000次。我们会有70%的可能性得到以下的结果：出现得较为频繁的那种颜色总共出现了265.35天，即约占这段日子的73%，而出现得不那么频繁的那种颜色仅仅出现了99.65天，即约占这段日子的27%。

紧接下来让我们假设，有两位概率论家——一位客观主义者（A女士）和一位主观主义者（B先生）——被要求去分析一个事件序列，序列中的每一个元素都有两种可能的取值。不为他们所知的是，这个序列实际上是由"红或蓝"游戏生成的。也许这个序列可以用一台人造的装置来产生，这台装置每隔一定的时间就会在屏幕上闪现0（相应于"红"）或1（相应于"蓝"）。不过，在自然界中出现这个序列也不是不可能的事情。比方说，考虑一个由日子（day）构成

的序列，依据当天是否下过雨，每一日被归类为“有雨的”或“干燥的”。一项对特拉维夫（Tel Aviv）在雨季（12月、1月与2月）的降水量的研究表明，相关的日子序列可以成功地被一个相依事件序列所模拟。具有这种特殊相依性的序列被称为**马尔可夫链**（Markov chain），也就是说，某日有雨的概率被假定依赖于前一日的天气状况，而不依赖于该序列中更早的日子的天气状况。事实上，从经验中所获得的概率为：相对于其前一天是干燥的，某天是一个干燥的日子的概率 = 0.75，而相对于其前一天是有雨的，某天是一个有雨的日子的概率 = 0.66（若要了解更多的细节，请参见 Cox and Miller，1965：78 - 79）。很明显，这种相依性会使得有雨的日子或干燥的日子持续出现的天数比根据独立性假定所期望的天数更多。可见，由特定的地方和季节的有雨的日子和干燥的日子所构成的序列可以被“红或蓝”游戏相当好地表征也不是不可能的。

让我们把注意力转回到我们两位概率论家身上，并首先考虑那位客观主义者（A 女士）。在得知这个序列有随机特征后，她通过作出一个最为简单和常见的猜想——即这些事件都是独立的——来展开对该序列的分析。然而，作为一名合乎要求的波普尔主义者，她将对这个猜想进行严格的检验。于是，她做了一系列针对独立性的统计检验。不久她便摒弃了她最初的猜想，继而开始探究其他涉及那些事件之间的各种类型的相依性的假说。如果她是一个有天资的科学家，那可能她很快就会灵机一动地想到了“红或蓝”机制，并且能够再次通过一系列统计检验来认证它是正确的。

现在让我们来考虑那位主观主义者 B 先生。相应于 A 女士最初关于独立性的猜想，他自然是以可交换性假定作为出发点的。再让我们假定他在验前赋予了 $\omega_r^{(n)}$ 一个均匀分布（见上面的式 4.9），从而使拉普拉斯接续规则（式 4.10）得以成立。这只是为方便计算起见。即使给 $\omega_r^{(n)}$ 选择其他任何符合一贯性的验前概率，也总会有反直觉的结果出现。假设我们的情况是，“蓝”接连不断地出现了 700 次，随后“红”也出现了 2 次。B 先生可以使用式 4.10，代入 $n = 702$，$r = 700$，从而算出紧接下来的那一轮得到“蓝”的概率。这样所给出的“蓝”的概率——保留三位有效数字——是 701/704 = 0.996。由于知道这个游戏的机制，我们能够算出“蓝”在下一轮出现的真实概率，它是很不一样的。第 700 轮给出“蓝”，而第 701 轮则给出“红”。这仅仅在以下情况下才有可能出现，亦即：s 在第 700 轮是 0，而第 701 轮的抛掷结果是反面朝上，使得 s 在该轮变为 -1。接下来的那次抛掷必定又是得出了反面朝上，否则第 702 轮会再次给出“蓝”。因此，s 在第 703 轮开始时必定为 -2，而这意味着在这一轮出现“蓝”的概率是零。接下来让我们考虑费勒大规模进行的 31536000 轮游戏的其中一段时间的情况。假设相关的结果是，出现得最为频繁的那种颜色所出现的时间占了

这段时间的73%（正如前面所指出的，有70%的可能性出现这种结果，所以这并不是一个不大可能的结果）。自然地，B先生会把出现这种颜色的概率估计为0.73左右，因而远远高于出现另一种颜色的概率。不过，在潜在的真实游戏中，那两种颜色恰好是对称的。

我们看到，B先生用到了可交换性的那些计算会给出与真实的情况大相径庭的结果。而且，B先生可能不久就会注意到，有很多时候其中的一种颜色会在一个很长的时间间隔内接连不断地出现，从而使得他的可交换性假定不能被看做是真的。因此，他可能认为把他的可交换性假定转变为其他某种假定是可取的。然而，令人遗憾的是，根据德·菲耐蒂的观点，他可能不获准这样做，因为（为了说明这一点，这里再次引述上面所给出的那个关键文段的其中一部分）：

> 当经验告诉我们前n次试验的结果为A时，我们的判断不再表达为概率$P(E_{n+1})$，而是表达为概率$P(E_{n+1}|A)$，即当我们把结果A视为事件E_{n+1}的条件时我们的初始意见就已经赋予了该事件的概率。这个初始意见没有什么被驳斥或被纠正；事实上不是函项P被更改（被另一个函项P^*代替），而是变目E_{n+1}被替换为$E_{n+1}|A$，这正是保持了对于我们最初的意见的忠实性（这体现在对函项P的选择上）。
>
> (de Finetti，1937：146)

不过，如果我们在验前就假定了可交换性，而实际上那个事件序列却是相依的，那无论怎样通过贝叶斯条件化把我们的验前概率$P(E_{n+1})$更改为验后概率$P(E_{n+1}|A)$也不能得出符合真实情况的概率。德·菲耐蒂对可交换性的分析起初看起来是似真的，只是因为它被运用到了抛掷硬币的场合，我们从长期的经验中了解到，对一枚硬币的诸次抛掷是可以被有效地看做客观上独立的。除非我们知道那些事件是客观上独立的，否则我们不能保证使用可交换性会得出合理的结果。

这一点说明了为什么接续规则会在“太阳在某天早上神秘地未能升起”这个事例中导致极其错误的结果。当然，我们的背景知识告诉我们，太阳接连不断地升起并不是独立事件，相反，它们是高度相依的。对一个事例的考察可以强化我对于这种情况的说明，这个事例在某些方面类似于那个关于日出的例子，但在这个事例里我们知道那些事件都是独立的。在这样的一个事例里，正如我们将会看到的，接续规则给出了极为合理的结果。

假设我们在一个容器里装有很多小球。在这个容器被彻底摇匀之后，我们从中抽出一个小球，记下它的颜色，然后再把它放回去。我们可以设想，我们的一

部分背景知识使我们对所有相关的机制有详尽的了解，因此，我们能确信各次抽球都是独立的。然而，我们既不知道容器中小球的数量，也不知道它们的颜色。事实上，容器里有 1000000 个小球，其中有 999999 个是黄的（相应于太阳升起），有 1 个是黑的（相应于太阳未能升起）。假设黄球被抽到 737855 次，然后黑球被抽到 1 次。接续规则所给出的下一次抽到黄球的概率精确到七位有效数字是 737856/737858 = 0.9999972。在这种情况下，这实际上并不是不合理的。目前的那些结果表明，在该容器里黄球的数量必定占有压倒性的优势。因此，就算容器里再多几个黑球，我们下一次还是极有可能抽到黄球，只要容器被非常彻底地摇匀（独立性假定）。在这个从容器中抽球的事例里，接续规则给出了一个合理的结果，但在那个太阳未能升起的事例里，它却给出了一个荒谬的结果。这是因为我们知道独立性适用于抽球的事例而不适用于与太阳的升起与否有关的事例。我们的结论——即我们只有在我们的背景知识的基础上确信那些相关的事件在客观上是独立的，我们才可以运用可交换性——也由此得到了加强。

我的批评就此结束。现在让我们来看一看德·菲耐蒂的支持者大概是如何试图对它作出回应的。其实德·菲耐蒂本人也在一两处地方谈到过与这个问题有关的内容。在表明了可交换事件是客观主义者的独立等概事件的主观等价物之后，他指出，人们可以引入各种形式的相依事件的主观等价物，尤其是马尔可夫链的主观等价物。他是这样说的：

> 人们可以首先考虑关于这样一些事件类的情况，正如可交换事件类能以某种方式与等概独立事件类相联系，这些事件类也能通过同样的方式被归类为具有 1，2，…，*m*，…这种次序的马尔可夫“链”。
>
> （de Finetti，1937：146）

我们可以把这样的事件视为**马尔可夫可交换的**（Markov exchangeable）。德·菲耐蒂认为，它们在使他的理论得到推广的同时也会使它面临更为错综复杂的情况，但并不会引起任何根本性的问题：

> 人们不能在验前就完全排除事件的次序的影响……因此，这会有一定的自由度，但也会有相当大的复杂性，不过，在把我们的证明限定于关于可交换事件的情形之前，那个问题的提出方式及其构思过程不会发生什么变化。
>
> （de Finetti，1937：145）

也许德·菲耐蒂有如下的考虑。我们不但要考虑可交换性还要考虑各种形式的马

尔可夫可交换性（Markov exchangeability），而非单单假定可交换性。对于这些可能性，我们给每一个都赋予验前概率。可交换性多半会具有最高的验前概率。如果被考察的对象是一个标准的对象，比如说，有偏向性的硬币，这个很高的验前概率就会得到加强，所得出的结果也与只靠假定可交换性而获得的结果大致相同。然而，如果被考察的对象是一个异乎寻常的对象，那么，可交换性的验后概率将会逐渐下降，而其他可能性中的一个的验后概率则会不断上升，直至它变得远比可交换性可能为止。这样的一种方案能解决所提到的那些问题吗？我马上就会论证表明它不能。

刚才所介绍的这种方法的主要问题在于，它复杂得不可行，而且这些复杂的步骤是相当不必要的，因为根据客观进路，它们都可以被完全消除。下面我将依次说明我这两点看法。导致情况这么复杂的原因是，按照这种方法，**人们有必要考虑在探究的一开始就有望出现的所有可能性**。为了提出他的验前概率，B 先生不得不考虑有望出现在事件序列中的相依性的各种可能类型，并给每种类型都指派一个验前概率。相依性存在着为数众多的不同的形式。德·菲耐蒂谈到了各种不同次序的马尔可夫链，但其实也同样有诸多非马尔可夫式的相依性形式。即使 B 先生列出到目前为止已经被数学家们明确而详细地界定和研究的所有相依性形式，他仍然有可能遗漏适用于他正在考虑的事件序列的相依性，因为这也许是一种迄今为止未被研究过的形式。不过，对于 B 先生而言，列出目前已知的所有相依性形式并给它们指派验前概率将会是一件太过复杂，以至于超出大多数人的能力的任务。据我所知，尚未有人能详尽无遗地实施这项任务，这正表明了它的难度。我的第二点看法是，采纳客观进路可以完全消除所有这些复杂的做法。当我们的客观主义者 A 女士考察一个具有某种迄今为止尚未被研究过的形式的事件序列的时候，她只需对单独一个可能性作出考虑，以此作为分析的起点。她一开始可以提出这样一个猜想，亦即：那些事件是独立的，对于各种结果，它们都有相应的恒定概率。她在验前不必为其他关于相依性、可变概率之类的假设费心，因为作为一名合乎要求的波普尔主义者，**她会将她最初的猜想付诸一系列严格的统计检验**。有可能这些检验验证了她最初的猜想，那么在这种情况下，在验前详细考虑其他可能性就是在浪费时间和自找麻烦。然而，也有可能相关的检验反驳了她的猜想，那么在这种情况下，她在那个阶段会根据所获得的结果尝试构思某个新的假设。这种循序渐进的处理方式使这个问题变得不再棘手，而贝叶斯主义者们试图在验前考虑所有可能性的做法则是相当不可行的。

现在让我们来考虑另一种对我们所作的批评的可能回应方式。可能会有主观主义者认为，德·菲耐蒂的要求——即验前概率只能通过贝叶斯条件化来改变［也就是从 $P(E_{n+1})$ 到 $P(E_{n+1} | A)$］——太强了。大概验前概率通常是应该以

这种方式来改变的，但万一出现了罕见的结果，好比在“红或蓝”游戏中所出现的那样，验前概率则可以通过某种相当不同的方式来改变，从而把新的情况也考虑在内。这种解决困难的方法毫无疑问是借助了常识，而且我确信它在实践中会被采用。然而，令人遗憾的是，它摧毁了德·菲耐蒂的可交换性归约的基础，甚至可以说，它从总体上摧毁了贝叶斯主义的基础。可交换性归约的可行性取决于以下论点：一群不同的人无论选取怎样的验前概率，他们的验后概率都将收敛于一个相同的值。然而，这个论点只有在假定这一群人中的所有成员都正在通过贝叶斯条件化把他们的验前概率转变为验后概率的情况下才是有效的。如果他们在任何时候都被允许以某种相当不同的方式来改变他们的验前概率（比方说像下面所举出的做法），那就不能保证他们的验后概率将会变得完全相似了。在500个事件之后，B先生可能突然决定作出改变，转而假定马尔可夫可交换性的某种形式，而A女士则继续运用可交换性。在700个事件之后，他们的验后概率可能就变得完全不同了。此外，贝叶斯主义最为诱人的一个特征在于，它提供了一个简单的数学公式，使得一个有理性的人应该以这种方式根据经验来改变他或她的信念。如果我们现在说：“是的，有时候有理性的人是应该利用这个数学公式来改变他们的信念，但是，只要他们愿意，他们当然也可以相当不受限制地以一种全然不同的方式来改变他们的信念”，那么，想必我们就已经失去那个使贝叶斯主义成为一个有吸引力的理论的特征了。

我的结论是，德·菲耐蒂的可交换性归约是行不通的，而且我将清楚表明，我用于反对这种归约的那些论点也可以用来从总体上反对贝叶斯主义。在下一节我会对这个问题作简要的讨论。

第七节　对贝叶斯主义的若干反对意见

大多数贝叶斯统计学家大概是以如下方式运用贝叶斯主义的。他们假定，在一个给定的问题中，存在着一个由有待考虑的可能假设构成的集合。这个集合可以被记作 $\{H_\theta\}$，其中，$\theta \in I$，对于特定的集合 I 而言，I 通常都是实数轴上的一个区间。参数 θ 先被赋予一个验前分布，比如说 $\mu(\theta)$，然后这个分布再被转变为一个验后分布 $\mu(\theta \mid e)$。实际上，它们都是在那个正被考虑的假设集上的分布。因此，让我们设定 $P(H_\theta)=\mu(\theta)$，$P(H_\theta \mid e)=\mu(\theta \mid e)$。

我们可以使用以下这个简单的“黑箱”模型来检验这种方法。B先生正面对一个黑箱，在固定的时间间隔 $t=0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 内，这个黑箱会在屏幕上闪现一个数字（0或1）。令这些数字的序列为 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$。它是由某个不为B先生所知的过程生成的。当B先生知道 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的值

但不知道 x_n 的值的时候，他就得对那些具有 $P(x_n \mid x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 这种形式的概率的值作出选择。这些概率被视为在他平常与A女士玩的打赌游戏中他对于第 n 个数字的赌商。B先生是使用本节开头那段所描述的贝叶斯统计学家的标准方法来处理这个问题的。若 e 给出了 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的观测值，那他就可以用 $P(H_\theta \mid e)$ 去计算 $P(x_n \mid e)$。

我们先前（上一节）所提出的基于"红或蓝"游戏的反对意见在这个框架内也同样适用。假设B先生选择了 H_θ 等于这个序列是独立的并且 $Prob(1)=\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant1)$。再进一步假设这个序列实际上是由"红或蓝"游戏生成的，其中，"红"=0，"蓝"=1。像上一节所论证的那样，我们可以表明，尽管B先生对贝叶斯条件化进行有条理的运用，以此作为他的学习手段，但是这样做会产生出一个与现实完全不符的概率序列。可见，贝叶斯条件化不会成为一种十分行之有效的学习策略。

显然，贝叶斯主义者对于这个论证可能会作出的回应是：B先生所考虑的那些假设集中在一个太过狭窄的类别里，他应该拓宽考虑的类别。然而，艾伯特（M. Albert）已经表明，这样的回应存在着严重的问题。[⑨]艾伯特让我们设想：在那个黑箱的屏幕上闪现的0和1是由他称之为**混沌钟**(Chaotic Clock）的一个装置所生成的。图4.1是这个装置的图示。它有一根指针能指向区间 $I=[0, 1]$ 内的所有实数，其中，在钟盘正上方的位置是0，在钟盘正下方的位置是1/2。最初的时候，指针对钟盘正上方的位置有所偏离，构成了一个夹角 $\omega=2\theta\pi$，因而指在了实数 θ 上。当 $t=1, 2, \cdots, n, \cdots$ 时，指针每次的移动幅度都会根据夹角 ω 的度数倍增。

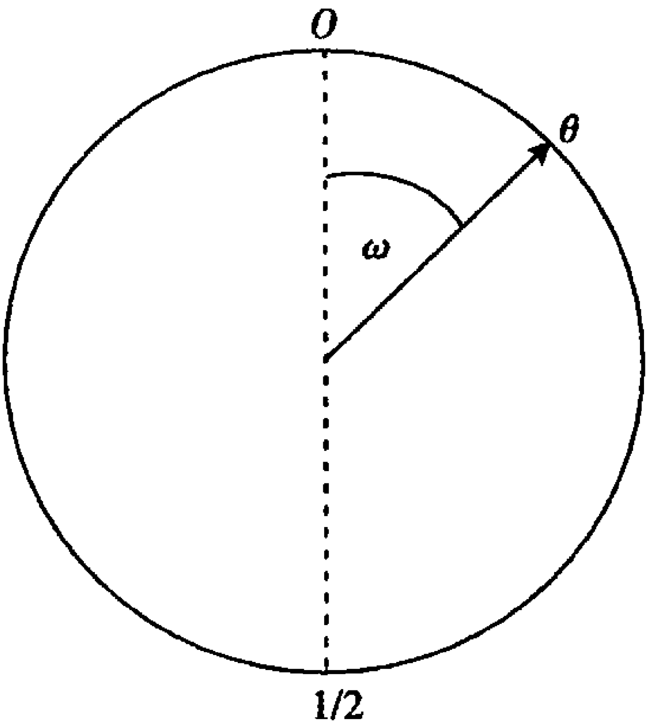


图4.1　混沌钟

至于0和1的序列是如何被生成的，B先生可以根据混沌钟的机理来构造这方面的假设。H_θ 可以是：θ 是指针的初始位置，如果指针落在了钟盘左边，黑箱的屏幕就显示0，否则显示1。出于技术上的原因，艾伯特（Albert，1999）稍微修改了这个混沌钟假设集，并对其作出考察，然后证明了一个可以被称为“怎么都行定理”（Anything Goes Theorem）的引人瞩目的结论。假设无论什么样的学习策略B先生都可以采用，也就是说，他可以以任意方式选择他的 $P(x_n|e)$ 序列。这样一来，在其选项中会存在着某个在这一经过了修改的混沌钟假设集上的验前分布 μ，该分布满足以下条件，即B先生的那些概率都是通过对 μ 进行贝叶斯条件化而得到的。

艾伯特的结论其实是十分吸引人的。他那些混沌钟假设绝对不是荒谬的。毕竟混沌理论现在既被用于物理学也被用于经济学。事实上，涉及混沌的假设作为解释手段——比如说，用于解释股市波动——是相当似真的。如果B先生真的面临一个奇异的0和1的序列，为什么他就不应该考虑一个基于混沌理论的假设呢？可能发生在他身上的情景与金融市场中的交易人的真实情景不会相差得太远，因为他们就坐在电脑旁紧盯屏幕，并对一些不久将会发生的事情进行打赌。不过，如果B先生被允许考虑相关的混沌钟假设集，那么他所采纳的任何学习策略都会成为一种对诸验前概率作出了一个合适选择的贝叶斯策略。实际上，贝叶斯主义已经变得无所作为了。

由此可以推知，我们在本节所考察的那种类型的贝叶斯主义者（比方说B先生）陷入了进退两难的境地。B先生可以采用一个相当有限的假设集去实施他的贝叶斯条件化，但是这样一来，正如“红或蓝”游戏的例子所表明的，如果他的集合把那个真正的假设排除在外，那他的贝叶斯学习策略就绝不可能使他有望全面理解真实的情况。这是第一方面的困境，或曰“红或蓝”困境。如果B先生回应说他正准备考虑一个涵盖面极广的假设集，那么，这个集合肯定会包括来自混沌理论的假设，这样会导致他所做的任何事情都满足贝叶斯主义的要求，从而使得整个方法都无所作为。这便是第二方面的困境，或曰“混沌钟”困境。

这些困难——即贝叶斯主义所面临的困难，以及更为具体地体现在德·菲耐蒂的可交换性归约上的困难——的确表明了可能需要有客观概率和一套基于检验的统计学方法论。因此，这是着手考察关于概率的几种主要的客观理论的好时机，我将在接下来的三章对它们展开探讨。然而，本章到此尚未结束，我还会在最后一节对德·菲耐蒂引入主观理论的历史背景作出考察。

第八节　德·菲耐蒂研究主观概率的路径

在前面我表明了拉姆齐是怎样通过批评凯恩斯的逻辑理论而得出概率的主观理论的。然而，德·菲耐蒂并不是以如此方式得出这种理论的，因为正如我之前所指出的，他只是在他创立了主观理论之后才仔细研究凯恩斯对于概率的观点的。这么说来，德·菲耐蒂研究主观概率的路径又是怎样的呢？

德·菲耐蒂（de Finetti，1995）在一些回忆往事的文段里谈到了他最初是在什么时候推论出概率是主观的。根据他所能记得的情况，他在其学术生涯的很早期就已经采取了这种哲学立场，事实上：

> 当我还是一个学生的时候，大概在大学毕业前两年，那个时候我正在研读裘倍尔（E. Czuber）的著作《概率论》（*Wahrscheinlichkeitsrechnung*）……那本书对概率的各种观念有一个简要的叙述，那就是在开头的几段非常概略地介绍一下。现在无论是在总体上还是关于概率的各种观念，那本书的内容我都不是记得很清楚了。在我印象中他好像谈到了德·摩根（A. De Morgan），并把他作为主观观点的代表……比较了各种立场之后，在我看来，其他所有定义都是无意义的。依我看，那个基于所谓的“等概情况”的定义尤为不可接受。
>
> （de Finetti，1995：111）

裘倍尔论述概率的那本书出版于1903年，在1908至1910年间又有经过了增订的第二版面世。在20世纪最初的几十年这是一本重要的著作，曾被凯恩斯大量引用。值得注意的是，凯恩斯说裘倍尔对几何概率悖论的说明是最好的说明之一（Keynes，1921：47），尽管如此，裘倍尔还是认为某种形式的不充分理由原则是必不可少的。

然而，在德·菲耐蒂（de Finetti，1931a）首次对概率哲学所作的系统论述中，他既没有谈到裘倍尔也没有谈到德·摩根。他主要引证的反而是法国学派的概率论家——贝特朗、博雷尔、莱维（P. Lévy）以及彭加勒（H. Poincaré）——的著作。当然了，这些著述家都是从拉普拉斯传统中一路走来的，因而他们的著作（特别是贝特朗和博雷尔的著作）都对无差别原则悖论作了详尽的讨论。可见，尽管德·菲耐蒂所读的书肯定与拉姆齐所读的有相当大的差异，但他却面临着同样的问题情境，即由无差别原则悖论所引起的对于传统的拉普拉斯类型的贝叶斯主义的困难。这些悖论之所以产生，是由于有人觉得有需要借助某种合逻辑

的程序去求得唯一正确的概率。不过，从人们的主观意向的角度来看，它们可以被消除掉，因为主观意向允许不同的人有不同的验前概率，这样做并不会导致矛盾。

不过，德·菲耐蒂并不是把注意力局限于无差别原则所产生的问题上，另一方面，他还拒斥全部拉普拉斯式的观点，即拉普拉斯决定论和拉普拉斯所认同的理性的启蒙价值。对于决定论，德·菲耐蒂说道：

> 毫无疑问，我们不能接受决定论；我们不能接受在那个久闻大名的所谓的黑暗和神秘的领域中有支配宇宙的永恒的和必然的“规律”“存在”，而且依据我们的逻辑，它是完全没有意义的，所以仅凭这一点，我们就不能把它当做真理来接受……
>
> 自然不会以这样一台大得令人震惊和永远保持精确的齿轮发条装置的面貌呈现……在这台装置中，所发生的每件事情都是必须发生的，因为它不能不发生，而且一切都是可预见的，如果人们知道该装置如何运转的话。
>
> (de Finetti, 1931a: 169 - 170)

在其著作中，德·菲耐蒂反复提到这种对决定论的批评，并且经常考虑应该用什么东西来替代它。他（de Finetti, 1931a）还明确表示拒绝接受启蒙理性主义而支持一种相对主义的甚至非理性的思想方法。于是他说道：

> 概率的主观理论……（可以作为——引者注）……一个范例表明如何把相对主义的思想方法应用于概率演算这样一门日益重要的现代数学分支，它正是我们想要以非理性主义与——我们将要谈到的——概率主义的形式提出的新的科学图景的必不可少的一部分。
>
> (de Finetti, 1931a: 172)

正如我们在第二章末尾所评说的，这些反启蒙的主题恰恰是20世纪的特征，也许这个特征尤其体现在20世纪30年代，当时德·菲耐蒂正在进行他的著述工作。

虽然德·菲耐蒂谈到了上面提及的所有法国著述家，但他最常提到的是彭加勒在《科学与假设》（*Science and Hypothesis*）中论述概率演算的章节（Poincaré, 1902: 183 - 210）。在这里彭加勒确实引入了主观概率，他表示：当一个赌徒试图一举获胜时，主观概率是合适的概念（Poincaré, 1902: 187 - 188）。然而，他接下来又认为：存在着客观概率，客观概率会在一个长重复事例序列（a long se-

quence of repetitions）中显现。这样看来，德·菲耐蒂似乎接受了彭加勒的主观概率概念，但同时又看不到任何对于客观概率的需要。然而，彭加勒有一个基于保险业务的支持客观概率的论据。他问道：保险公司怎么能定期获得利润呢，如果没有某种相应于它们的概率计算结果的客观实在性的话？这个论据明显使德·菲耐蒂感到困惑，因为他对此有如下的评论：

> 从一个主观概念推出符合实际的行为规则似乎是不可思议的。因此，彭加勒反复解释为什么主观说明在他看来是不充分的，他谈到了概率演算在保险领域的实际应用。"有很多应用概率演算规则的保险公司，它们给其股票持有者发放股息，这些股息的客观实在性是无可争辩的。"
>
> （de Finetti，1931a：194）

若考虑到伦敦劳合社（Lloyd's of London）所经历的危机，彭加勒的例子可能会遭到非难。当时，这家保险公司不但未能发放股息，甚至还给它的很多"承保记名人"带来了财政上的灾难。是否这就是一个支持概率的主观进路的论据呢？难道劳合社的保险经纪人为各类事件所拟定的主观概率是相当不吉利的吗？尽管它们都是完全一贯的。又或者说由于他们未能正确地运用概率演算因而都是一帮无能的家伙吗？不巧的是，这整件事情被层层迷雾所笼罩，其中充斥着对诈骗和贪污的指控。因此，要得出任何确切的结论是很难的。

我们现在可以来考察一下拉姆齐和德·菲耐蒂之间的另一处重大差异。我们应当认为是德·菲耐蒂而非拉姆齐提出了可交换性这一概念。但有必要对这个说法作一点限定，因为在拉姆齐的其中一份手稿上确实记载了在 $r=n$ 这种特殊情况下对于拉普拉斯接续规则的推导，他使用的论证方式与前面所给出的颇为相似，尽管这些手稿直到 1991 年才首次出版。拉姆齐是在这样的条件下进行推导的，即"假定'在 $n+1$ 次中有 μ 次是 A'的先验机会是 $\phi(\mu)$，所有排列方式都是等概的"。（Ramsey，1991：278）条件"所有排列方式都是等概的"在这个语境下等值于德·菲耐蒂的可交换性。伽拉沃蒂是第一个将这则笔记公之于众的人，她指出：拉姆齐的这个条件"来源于其师约翰逊，他曾经引入了一条'排列公设'（permutation postulate）"（Galavotti，1994：333）[10]。然而，我们在此所看到的是一则没有公开发表的简短的笔记，它所讨论的是一个非常特殊的情况。这是无法与德·菲耐蒂的论述（de Finetti，1930b：121）相提并论的，德·菲耐蒂清楚明确地定义了这个概念[11]，然后转而在一系列重要的文章中逐渐形成了关于可交换随机量的数学理论，他 1937 年的那篇论文正是这些成果的结晶。由于德·菲耐蒂想要完全消除客观概率而代之以主观概率，所以他比拉姆齐有更大的

动力去阐发关于可交换性的理论，而反观拉姆齐，至少在其 1926 年的著作中，他像彭加勒一样，倡导一种双概念的概率观，主张既要有客观概率也要有主观概率。我会在第五、第六和第七章详尽地论述两种最主要的关于概率的客观理论，然后在第八章再回过头来讨论拉姆齐的双概念观（two-concept view）。

第五章　频 率 理 论

概率的频率理论最初是由剑桥学派的埃利斯和文恩（J. Venn）在19世纪中叶发展起来的，它可以被看做“英国经验主义”对拉普拉斯及其追随者的“大陆理性主义”的一个反动。它是在维也纳学派所造就的经验主义繁荣时期流行开来的。有过一段时间（1922—1936年），经验主义的这种20世纪的版本在欧洲大陆曾经有它的主要传播中心，但随着维也纳学派的分崩离析，它又回到了它的家乡和其他英语国家。在这个时期，与维也纳学派关系密切的两位思想家——汉斯·莱辛巴赫（Hans Reichenbach）和理查德·冯·米泽斯（Richard von Mises）——推动了概率的频率理论的进一步发展。对于这个理论，我比较偏爱冯·米泽斯的版本，接下来我将对它作出阐述。而莱辛巴赫的版本可以在他1949年的那本书中查找到。

冯·米泽斯对于频率理论首次公开发表的论述见于他1949年的那篇文章，而他在这个主题上最为有名的著作是他于1928年出版的《概率、统计学与真理》（*Probability, Statistics and Truth*）一书。冯·米泽斯于1953年去世。他的遗著《数学概率论与统计学》（*Mathematical Theory of Probability and Statistics*）（von Mises, 1964a）是由其遗孀希尔达·盖林格（Hilda Geiringer）将他的一些文章汇编而成的，此书包含了他对于该主题的最后的想法和他对于批评的回应，而且还讨论了一些有意思的数学观点。

第一节　作为一门科学的概率论

在逻辑进路中，概率论被看做是逻辑学的一个分支，亦即演绎逻辑向归纳方面的延伸。在主观进路中，概率论被看做是关于特定的人的置信度的。与这两种观点相比，频率进路把概率论看做是像力学那样的一门数理科学，只不过它探讨可观察现象的另一个不同的领域而已。在其《概率、统计学与真理》的德文版第三版的前言（1950年）里，冯·米泽斯正是这样描述他的理论的特点的。他说道：

这个大约出现于1919年的构想本质上是新的［尽管法国的A. A. 库尔

诺（A. A. Cournot）、英国的约翰·文恩（John Venn）以及德国的格奥尔格·赫尔姆（Georg Helm）之前在某种程度上也提出过这样的想法]，它把概率论视为一门与几何学或理论力学属于相同类别的科学。

（von Mises，1950：vii）

冯·米泽斯第一篇论述频率理论的文章正是在1919年发表的；即使这个构想不像他这里所暗示的那么新颖，但是，他对它的描述看来也是相当准确的。

关于这门所谓的概率科学，我们可能首先会问："它的研究主题是什么?"冯·米泽斯是这样回答的："正如几何学的研究主题是对空间现象的研究，因此概率论探讨的是群体现象和重复事件。"（von Mises，1950：vii）冯·米泽斯把几何学视为一门科学的观点是有一定争议的。尽管如此，但既然没有人怀疑力学是科学的一个分支，所以对他的立场作出如下的说明可能较为可取。概率论像力学一样是一门数理科学，不过，它不是探讨物体的运动和平衡状态以及作用于其上的力的，它讨论的是"关于同一个事件本身一再重复出现或者同时涉及大量形式相同的要素的问题"（von Mises，1928：11）。这种对于群集（collection）的强调与主观理论形成了显著的对比，因为主观理论认为概率是由特定的人指派给特定的事件的。在频率理论中，概率是与事件或其他要素的群集联系起来的，并且被认为是客观的和独立于估算它们的人的，这好比在力学中物体的质量是独立于测量它们的人的。

冯·米泽斯给出了一些关于他的重复事件和群体现象的例子，它们可以分为三类。第一类是"机会游戏"，在其中，我们探讨的是——例如——抛掷特定一枚硬币的长序列。第二类是某些"生命"统计资料，或者更广泛地说，某些"生物"统计资料。在这里我们的探讨对象可以是一组在1928年为40岁的德国男性，也可以是一组生长在某块地里的植物。最后一类是出现在物理学中的一些情况，例如对气体的一个特定的样本的分子作出考察。在所有被援引的例子中，都有一个特定的"属性"出现在构成重复事件的集合或群体现象的每一个"要素"上。例如说，每一次抛掷那枚硬币都会出现"正面朝上"或者"反面朝上"，那组德国男人的每一个要么在41岁之前死掉要么活着迈进他人生的第42个年头，在那块地里的那组植物结出了一定数量的谷粒，以及那些气体的每一个分子都有一定的速度。我们让每个重复事件或群体现象都有一个属性集与它们相联系，我们把其中的属性看做是先验可能的。这些属性构成了冯·米泽斯所谓的**属性空间**(attribute space)。

属性空间通常用Ω来表示，是一个由冯·米泽斯引入的、在大多数概率论的现代教科书中都能找到的概念。令人遗憾的是，它的名称已经由属性空间改成

了肯定是更为糟糕的样本空间(sample space)。Ω是一个可能结果集。如果我们进行一次抽样，自然地，这些结果中的某几个将会出现，但是这个可能结果集在本质上与抽样没有什么关联，而且任何一个给定的样本都不可能包含Ω中的所有元素。可见，这是一个支持恢复使用冯·米泽斯的术语的理据。严格地说，Ω应该被认为是由**基本属性**(elementary attribute)所构成的，因为Ω的任何子集本身就是一个属性或可能结果。现在以抛掷一颗骰子的情况为例来说明这一点。在此处，基本属性是1，2，…，6，因此$\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$。请考虑$\Omega$的子集$A=\{2, 4, 6\}$。这是一个（非基本的）属性，即“偶数点的”。

冯·米泽斯引入了**聚合**(collective)这个专门用语来描述上述类型的重复事件或群体现象。更为确切地说，他表示，一个聚合“指谓一个由形式相同的事件或过程构成的序列，这些事件或过程之间的差异体现在某些可观察的属性上，比方说颜色、点数或者别的什么东西”（von Mises，1928：12)。对**经验聚合**(empirical collective)与**数学聚合**(mathematical collective)加以区分是有益的做法。一个经验聚合是实际存在于现实世界的事物，它是可以被观察到的。某个星期一的早上在一个特定的地方对一枚硬币进行的诸次抛掷所构成的一个序列，又或者某个实验室在某个时间所准备的一瓶气体中的分子，都可以是这方面的例子。显而易见的是，一个经验聚合只有有限个元素。而另一方面，一个数学聚合是由一个无限序列$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$构成的，在这个序列中，对于所有$n$，$\omega_n$是$\Omega$的一个元素。关于现实世界中巨大但有限的聚合与数学理论中的无限序列之间的关系，自然会有一些问题产生，那我们现在就来简要地考虑一下这些问题。

首先要指出的是，一个数学聚合是由一个有序序列构成的，序列的每一项都编上了1，2，…这样的号码。它能与抛掷硬币的情形相当好地匹配，因为在这种情形中总是存在第一次抛掷、第二次抛掷，以此类推。然而，其他一些聚合的例子并不是天然地有序的。一块地里的植物或者一种气体中的分子都不会出现在一个特定的序列之中。当然了，我们能以某种方式给一块地里的植物编号，从而把它们归约为一个有序序列，但是这可以通过多种不同的方式来实现。如果我们就这样用一个有序序列去表征那些植物的那个经验聚合的话，那我们其实是在不明言地假定了用来给那些植物编号的方式是不重要的而且不会对所获得的结果产生影响。也许事实的确如此，但无论如何，这是一个重要的假定。我将在第七章结合倾向理论再来讨论这个问题。

现在让我们来考虑以下这个关键的问题。在冯·米泽斯的理论里，一个有限的经验聚合在数学理论中是用一个无限的数学聚合来表征的。这种用无限的量(the infinite)去表征巨大的有限的量(the large finite)的做法是合法的吗？冯·

米泽斯回答说“是”，因为这样的事情在物理学中随处可见。例如在力学中，我们用质点去表征有一定大小的物体，用无限细的线去表征有限粗的线，等等。正如我以前的一位老师常说的：“在物理学中，‘在无限远的地方’意谓‘在实验室的另一边’。”冯·米泽斯认为，他正尝试使概率论像力学那样以一门数理科学的面貌呈现，但期望他把它弄得比力学更严密则是不合理的。如果在力学中用无限的东西去表征有限的东西被认为是令人满意的话，想必在概率论中也肯定允许这样做。冯·米泽斯完全认同无限序列、无限细的线等都是经验实在的数学抽象物或理想化描述，但他断言，为了使对于实在的数学表征易于处理，这样的一些抽象物还是必要的。正如他所说：

> 人们已经尝试构造过若干种几何学，在这些几何学中并不存在“无限窄的线”而只存在有确定宽度的线。它们所推出的结论在数量上是贫乏的，因为这种处理方式远远要比常用的方式困难。此外，有确定宽度的细条只是另一种比直线好不了多少的抽象物……
>
> (von Mises, 1928: 8)

冯·米泽斯的这些论据确实有一定的力量，但它们还是不能使每个人都信服。然而，在频率理论稍微得到进一步的阐述之后，再回过头来讨论这个关于用无限的量去表征巨大的有限的量的问题将会更为合宜，因而我们将在“概率的极限频率定义”这一节对该问题展开讨论。

经验聚合与数学聚合之间的关系是冯·米泽斯对于数理科学如何与它们所关注的经验材料相关联的总体看法的一部分。图 5.1 是对这种看法的图解说明。

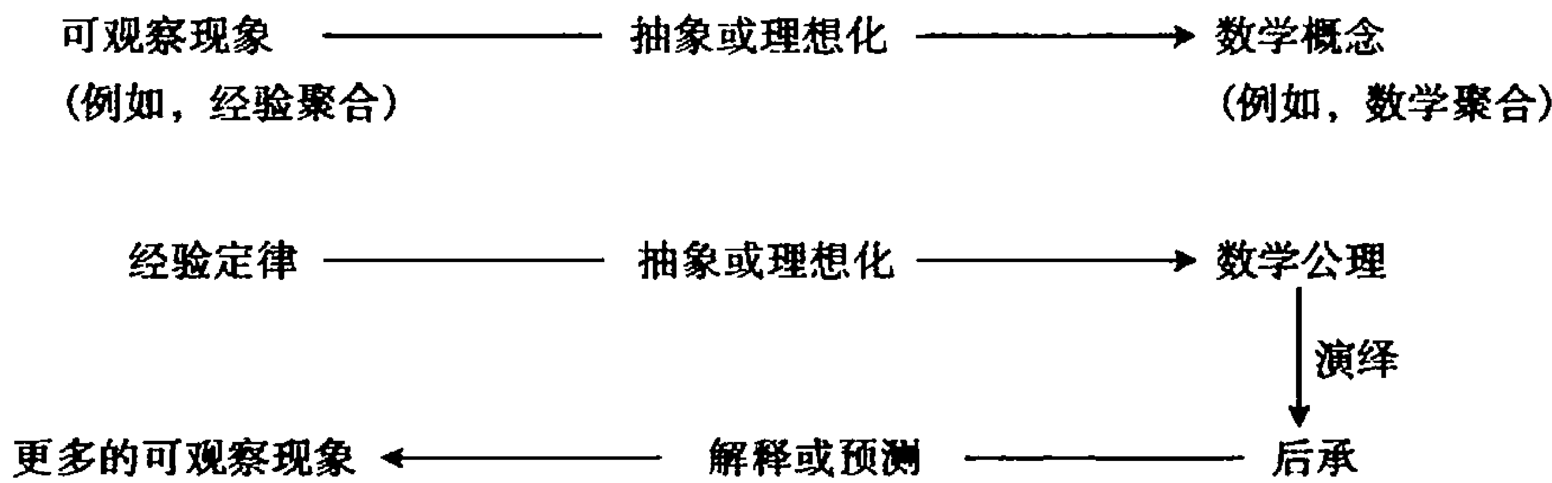


图 5.1　冯·米泽斯对于数理科学中的观察和理论之间的关系的看法

由于冯·米泽斯是一位经验主义者，所以对于他来说，出发点总是经验聚合之类的某种可观察现象。为了可以把这样的一些现象作为探讨的对象，我们需要

通过抽象或理想化得出一些数学概念，例如，当前所提到的数学聚合这一概念。在观察的基础上，我们下一步就是确立一些为正在研究的现象所遵循的经验定律。然后再次通过抽象或理想化，我们从这些经验定律得出我们的数学理论的若干公理。一旦该数学理论凭借这种方式得以建立，我们就可以依据逻辑由它演绎出一些后承，而这些后承则为更多的可观察现象提供了预测或解释。在下一节，我们会通过对经验聚合遵循什么经验定律，以及这些定律是怎样确立的作出考虑，并把这种模式进一步运用到概率论方面。

第二节 概率的经验定律

根据冯·米泽斯的观点，有两个经验定律被观察到对于经验聚合来说是成立的。他对第一个定律作出了如下的说明：

> 经验已经表明，在掷骰子游戏中——就像在我们已经提及的所有其他群体现象中的那样，某些属性的相对频率随着观察次数的增加变得越来越稳定，这一点对于概率论来说是绝对重要的。
>
> (von Mises, 1928: 12)

冯·米泽斯把统计频率的这种不断增强的稳定性称为“概率论的‘基本现象’[primary phenomenon (Urphänomen)]”(von Mises, 1928: 14)。我会把它称为**统计频率稳定性定律**(Law of Stability of Statistical Frequencies) ——一个由凯恩斯(Keynes, 1921: 336) 提出的名字。现在让我们尝试去把该定律说明得再确切些，并细察一些对它有利的证据。

令 A 为与一个特定的聚合有关的任一属性。如果 Ω 是这个聚合的属性空间，那么 $A \subseteq \Omega$。假设在该聚合的前 n 个元素里 A 出现了 $m(A)$ 次，这样一来，它的相对频率为 $m(A)/n$。统计频率稳定性定律就是：随着 n 的增大，$m(A)$ 越来越接近于一个确定的值。图 5.2 提供了对于这个定律的图解说明。

图 5.2 以图表的形式显示了抛掷一枚普通硬币 400 次的结果。正面朝上的相对频率（或者说频数比）是对照抛掷次数 n 标绘的。第一次抛掷肯定是掷出了正面朝上，因为相关的频数比是以 1 开始的。接下来它便以不规则的方式振荡，但是，在经过大约 200 次抛掷之后，振幅变小，频数比的值逐渐稳定在 1/2 左右。

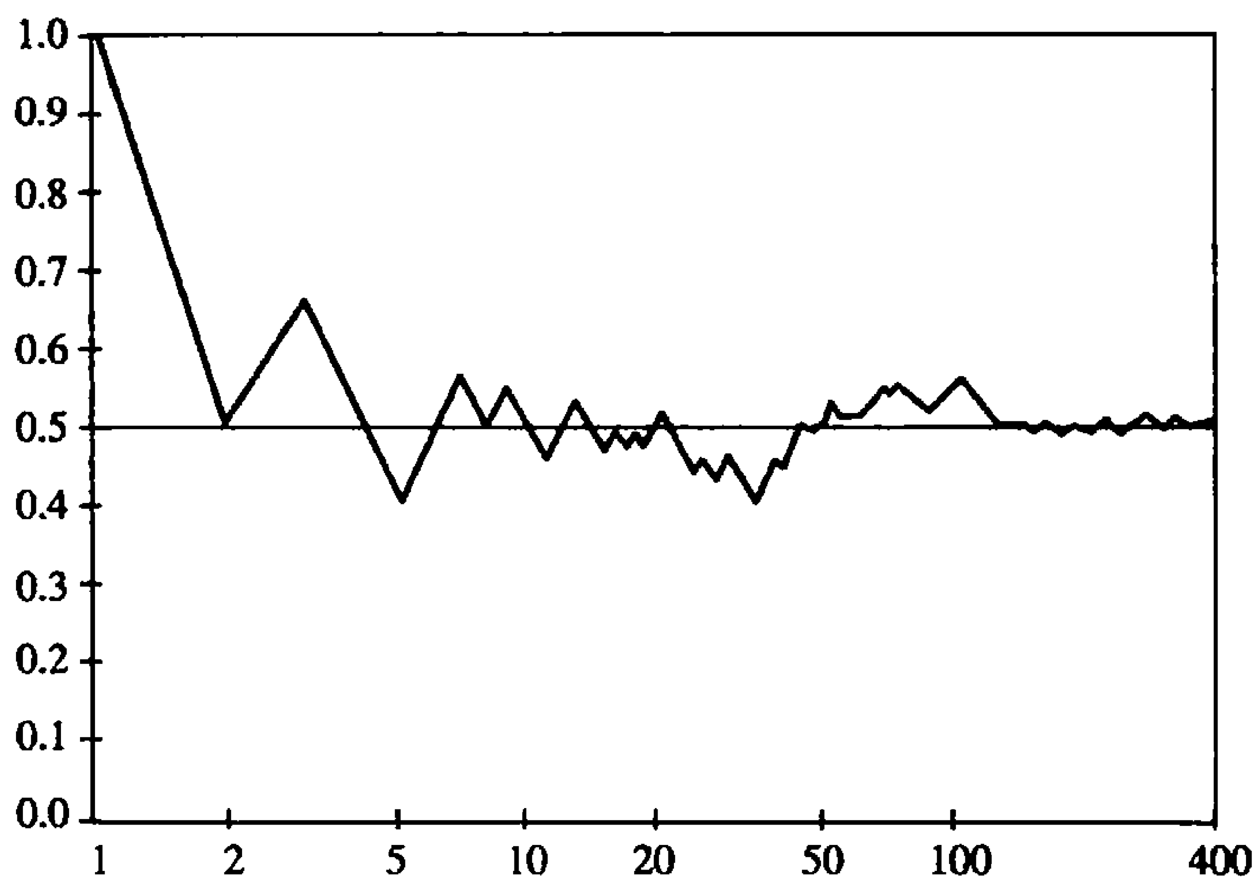


图 5.2　一个支持统计频率稳定性定律的经验证据

注：在一个由一枚硬币的诸次抛掷结果所构成的序列中出现正面朝上的频数比（横坐标采用对数标度）

按照冯·米泽斯的观点，统计频率稳定性定律被所有机会游戏（掷骰子游戏、轮盘赌、抽彩给奖法等）的观察记录、保险公司的生物统计资料等所认证。当然，这些认证性的数据一般说来并不是由于特地尝试去核实该定律而获得的结果，而是在这些领域进行其他活动的过程中收集到的。关于这一点，冯·米泽斯（von Mises，1928：58－64）谈到了梅雷骑士的事例，这方面我们之前（第一章第二节）也讨论过。在冯·米泽斯看来，德·梅雷先生当时关注的是两个不同的聚合。第一个聚合（C_1）的诸元素是由单独一颗骰子的 4 次抛掷结果组成的，被关注的属性（A）是：在四次抛掷中至少得到一个 6 点。第二个聚合（C_2）的诸元素是由两颗骰子的 24 次抛掷结果组成的，被关注的属性（B）是：至少掷出一次两个 6 点。德·梅雷先生通过经验观察，发现了 A 在 C_1 中的相对频率趋向于一个稍微大于 0.5 的值，而 B 在 C_2 中的相对频率则趋向于一个稍微小于 0.5 的值。可见，他通过勤奋的观察使统计频率稳定性定律获得了两次显著的认证，尽管这绝对不是他进行观察的动机。类似的考量也适用于保险公司等方面的情况。

到目前为止，我是同意冯·米泽斯的看法的。看来的确是存在着一个他所提出的那种粗略的经验定律，它也似乎得到了来自若干不同领域的观察资料的认证。然而，他下一步的做法较为让人感到没有把握，因为他试图以如下较为精确的方式来说明这个定律：

> 如果对正面朝上的相对频率的计算精确到小数点后第一位，要使这个初步近似值具有恒定性并不困难。事实上，也许在大约500轮以后，该初步近似值会达到0.5这个数值而且此后将不会改变。我们要花长得多的时间才能使计算到小数点后两位的二次近似值得出一个恒定数值……也许需要超过10000次的抛掷才可以表明，此时第二个数字也不再改变，一直等于0，因此该相对频率恒常地保持为0.50。
>
> （von Mises，1928：14）

我关于这段文字的疑虑是这样的。眼下冯·米泽斯正在说明的是一个据称不涉及任何理论的或数学的因素，仅通过观察而获得的经验结果。因此，为了核实"在大约500轮以后，该初步近似值会达到0.5这个数值而且此后将不会改变"这个断言，我们必须进行一个以下类型的实验。那枚硬币必须被反复抛掷，比方说1000次，而且从第500次起，每重复一次都必须核实正面朝上的相对频率是否为0.5（保留一位小数）。但接下来，对"也许需要超过10000次的抛掷才可以表明，此时第二个数字也不再改变，一直等于0"这个断言又该被怎样看待呢？为此，我们必须反复抛掷那枚硬币，比方说11000次，而且在10000次抛掷之后，每重复一次都必须核实正面朝上的相对频率是否为0.50（保留两位小数）。我已经实施过一些抛掷硬币的实验，我将在第七章给出我所获得的结果。然而，我发现，即使是将一枚硬币抛掷2000次，也是一件冗长乏味的事情。可见，在抛掷了一枚硬币11000次之后，再一次接一次地重复这个实验将会沉闷得令人生畏而且旷日持久。此外，我马上会表明，10000次左右的抛掷结果其实可以通过非常简单的数学计算得到。

假设一枚硬币被抛掷了n次，正面朝上出现了m次，对于这枚硬币，*Prob*（正面朝上）=1/2。进一步假设各次抛掷都是独立的。那么，根据棣莫弗的一个经典结论（参见第一章的注释④），m/n是近似正态地分布的。更为确切地说，当n很大时，$\frac{m/n-0.5}{0.5/\sqrt{n}}$的分布近似于具有零均值和单位标准差的正态分布。这样，从正态分布数值表中可以查到，有95%的概率我们会得到

$$\left|\frac{m}{n}-0.5\right| \leqslant \frac{0.98}{\sqrt{n}} \tag{5.1}$$

因此，我们有95%的概率可以使以下这些结论成立。如果$n=500$，则m/n处于区间［0.456，0.544］之内。正如冯·米泽斯所断言的，这确实应该赋予小数

点后第一个数字以恒定性。如果 $n=10000$，则 m/n 处于区间 [0.4902，0.5098] 之内，这并没有完全赋予小数点后的两个数字以恒定性。然而，对于 $n=50000$，m/n 则处于区间 [0.4956，0.5044] 之内，这应该会赋予小数点后的两个数字以恒定性。此外，上面的式 5.1 还告诉我们，大体说来，m/n 以 $1/\sqrt{n}$ 的速度逼近其极限值 0.5。

这些计算所间接表明的理论和观察之间的关系与冯·米泽斯所断言的（参见前面的图 5.1）是颇为不一样的。根据冯·米泽斯的观点，经验定律是通过观察获得的，而相关理论的数学公理则是对经验定律的抽象。一个粗略的经验定律确实可以直接从观察中获得，但是，为了使它更为精确，似乎我们应该暂时摒弃观察而代之以数学。那些数学计算间接表明了那个经验定律的若干更为精确的版本，例如：那个频率可能会在 500 轮之后保持不变，以及那个频率大体上可能会以 $1/\sqrt{n}$ 的速度向其极限收敛。然后这些结论可以通过进一步的观察来核实。总而言之，观察与理论之间的双向互动看来比冯·米泽斯所指出的要更多些。我们将会在第七章看到，倾向理论对这个互动过程的刻画比频率理论做得更好，但现在让我们回过头来继续阐述冯·米泽斯的理论。

关于经验聚合的第一个定律在冯·米泽斯提出之前就已经是众所周知的了。然而，第二个定律却是由他原创的。实际上，他认为他对它的阐述是他所推动的重大进展之一。在谈及他的前辈们（文恩等人）对于该学科的传承所作的努力时，他说道："这些尝试……没有造就，也不可能造就一个完备的概率论，因为他们未能意识到聚合的一个决定性特征……"（von Mises，1928：22）经验聚合的这个特征是：它是缺乏秩序的，亦即它具有**随机性**(randomness)。

冯·米泽斯对随机性的论述其实是他的理论最有意思和最具原创性的部分之一。冯·米泽斯（von Mises，1928：23）通过考虑下面这个简单的例子来开始他的论述。假设我们正沿着一条路行走，路边每隔一英里就有一块大石头，而在这些大石头之间每隔 1/10 英里则有一块小石头。第一个经验定律在这种场合下肯定会得到满足的，因为属性"大石头"有一个极限频率，即 1/10，而属性"小石头"也有一个极限频率，即 9/10。不过，冯·米泽斯并不认为这是一个真正的聚合，因为那个结果序列具有完全的确定性。比方说，在走过一块大石头之后我们知道下一块石头将会是小的，依此类推，便可知后面的石头的大小。这与目前所给出的那些经验聚合的例子相比是截然不同的。例如，在抛掷硬币的过程中，正面朝上和反面朝上构成一个序列，但无论到目前为止被观察到的是一个怎样的序列，我们也不会晓得紧接下来的那次抛掷的结果是什么，类似的情况也出现在其他的例子中。可见，真正的经验聚合是无序的，亦即满足某个关于随机性的定律。但我们如何才能把这个定律表述出来呢？

冯·米泽斯的巧妙想法是，我们应该把随机性与赌博系统的失败联系起来。例如，对于轮盘赌，一个赌博系统是如下类型的东西："在小球连续三次落到黑格子里以后下注赌小球接下来会落到红格子里"，或者"每七轮下注一次"，等等。毫无疑问的是，在一段很长的时间里，诸如此类的许多不同的赌博系统都会被试用。然而，正如冯·米泽斯所言：

> 这类系统的创造者们全部都或迟或早地有过这样的悲痛体验，那就是，他们发现没有一个系统能够改善他们长期获胜的机会，亦即，没有一个系统能够影响不同的颜色或数字出现在从游戏的整个序列所选出的一段序列之中的相对频率。
>
> (von Mises, 1928: 25)

换句话说，不但那些相对频率会大致稳定在一些特定的数值上，而且如果我们依据某个规则选择我们原先的（有限的）序列的一个子序列的话，这些数值也是会保持不变的。让我们把这第二个经验定律称为**排除赌博系统定律**(Law of Excluded Gambling Systems)。冯·米泽斯随即作了一个极富启发性的比较：

> 在我将略作讨论的这点上我想到了一个类比。在蒙地卡罗那里对系统入迷的人表现出了与另外一帮"发明家"的明显的相似性，我们已经习惯于在看待那些"发明家"的无效劳动时抱以一定的同情，他们就是"永动"机的构造者，是一个古老和永恒的群体。
>
> (von Mises, 1928: 25-26)

所有构造永动机的尝试的失败为能量守恒定律（Law of Conservation of Energy）提供了极好的证据。其实，我们可以把那个定律描述为排除永动机定律。赌博系统的失败正是以同样的方式为我们关于随机性的经验定律提供了极好的证据。

尽管冯·米泽斯提到了非常强有力的经验证据，但是关于成功的赌博系统的构想依然萦绕在那些沉迷于赌博的人的心头。陀思妥耶夫斯基(F. M. Dostoyevsky）本人就是一名不能自拔的赌徒，他以卓绝的才华在其小说《赌徒》（*The Gambler*）中刻画了那些人的心理状态。下面的一段文字说的是小说的男主人公对他在轮盘赌桌旁的某些想法的描述：

> 但另一方面我却得出了一个我认为是正确的结论：在一系列纯粹的机会中，即使不存在某个系统，也无论如何确实存在着某种序列——当然了，这

是非常奇异的。例如，可能凑巧有这样的情况：在出现了十二中区数之后，有后区十二数出现；那个小球在后区十二数上停留了比方说两次，然后就转到了前区十二数。在落到了前区十二数之后，它又转到了中区十二数，在那儿滚动了三四次，接着再次转到了后区十二数去，两次之后，从那里又再落到了前区十二数上，停留了一次，然后又落在了中区的数字上三次，这种情况会持续一个半小时或两个小时：一、三、二；一、三、二。这是十分有趣的。又比如说，恰巧有一天或有一天上午，红的与黑的交替出现，每分钟都在改变，几乎是无序的，以至于不管是红的还是黑的都不会连续出现超过两三次。而到了第二天或第二天晚上，唯独红的一直出现很多次，譬如说二十多次，这种现象会持续一定的时间，或许一整天都是这样。

(Dostoyevsky，1866：38－39)

我们看到，陀思妥耶夫斯基的男主人公——大概就是陀思妥耶夫斯基本人——相信“即使不存在某个系统，也无论如何确实存在着某种序列”。以下事实可以很好地证明了这个信念的虚假性，即陀思妥耶夫斯基在轮盘赌桌上不断地输钱——这令他的妻子悲伤不已。而巨富约翰·保罗·格蒂（John Paul Getty）则展现出了一种理性得多的态度，在一次电视访谈中被问到他是否进行过赌博时，他回答说：“如果我想要赌博，我会买下一间赌场。”

第三节　概率的极限频率定义

目前，我们已经引入了两个关于概率的经验定律，并表明梅雷骑士和陀思妥耶夫斯基的观察资料以及受过更多训练的保险公司员工和进行农业试验的一丝不苟的科研人员的观察资料都很好地支持了它们。冯·米泽斯的方案的下一步就是要通过抽象（或理想化），从这些经验定律得出相关的数学理论的公理。这些公理当然是适用于具有 $C=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$（对于所有 n，ω_n 是属性空间 Ω 的一个元素）这种形式的数学聚合的。从统计频率稳定性定律很容易就能得出第一条公理。我们可以对它陈述如下：

收敛性公理（axiom of convergence）：令 A 为聚合 C 的任一属性，则 $\lim_{n\to\infty} m(A)/n$ 存在。

现在我们把 A 在 C 中的概率［$P(A \mid C)$］定义为 $\lim_{n\to\infty} m(A)/n$。这就是著名的概率的极限频率定义。值得指出的是，这个定义使得所有概率都是有条件的，而这也是频率理论与逻辑理论之间的其中一个共同点。不过，即便如此，它们还

是有差异的。在逻辑理论中，一个假说的概率总是以一定数量的证据为条件的。类似地，在主观理论中，一个事件的概率总是取决于正在指派赌商的那个人，因而间接地是以那个人的信念的集合为条件。在频率理论中，所有概率都是有条件的，但它们不是以证据或信念的集合为条件，而是以某个聚合为条件的，正在被讨论的那个特定的属性被看做是出现在该聚合中的结果之一。一定数量的证据或信念与一个聚合之间的这种重大的差异实际上构成了刻画认识论解释与客观解释之间的差异的一种方式，我将在第七章尝试表明这一点。

在引入了概率的极限频率定义之后，现在让我们来检视一下对它的一些批评。对于这种理论，其中一个主要的反对意见就是认为它太过狭隘，因为有很多重要的场合我们会用到概率，但在这些场合中任何像经验聚合那样的东西都是无法得到定义的。正如凯恩斯在谈到频率理论一个较早的版本时所说："我认为，文恩的理论的一部分似真性源于他未能认识到其可适用性的狭窄限度。"（Keynes，1921：96）然而，冯·米泽斯认为这个所谓的缺点正是有利于他的理论的一个优点。他清楚地说明："我们的概率论与'是否存在着一个关于德国在将来的某个时候会牵涉进一场与利比里亚的战争的概率？'这类问题是无关的。"（von Mises，1928：9）他声称，只有存在着形式相同的事件的一个大的集合，我们才能在数学的或定量的意义上引入概率，他还力劝我们奉行他的准则——**"先有聚合，再有概率"**（FIRST THE COLLECTIVE—THEN THE PROBABILITY）（von Mises，1928：18）。

冯·米泽斯想要限定相关数学理论的范围确实是有些道理的。概率论的历史提供了一些关于"数值"概率的稀奇古怪的例子。比如说，托德亨特（I. Todhunter）（Todhunter，1865：408－409）记载了18世纪的概率论家孔多塞（M.-J.-A.-N. C. de Condorcet）所做的以下两项评估。罗马七王的统治时期一共持续了257年的概率被他认为是0.000792，而该时期为140年的概率却达到0.008887。他还计算了占兆官阿克齐乌斯·奈维乌斯（Accius Naevius）用剃刀切开一块石头的概率。这得出了一个较为整齐的数字10^{-6}。

冯·米泽斯在这方面的观点与他关于科学进化的某些一般性理论是相关联的。冯·米泽斯（von Mises，1928：1）赞同地引用了利希滕伯格（G. C. Lichtenberg）的格言——我们所有的哲学都是对语词惯常用法的纠正。按照冯·米泽斯的观点，一开始我们可以使用来自日常语言的不精确的概念，但当我们正在构造一个科学理论的时候，我们必须把它们替换为更为精确的概念。他进一步认为，这些精确的概念应该**通过显定义**（by means of explicit definitions）来被引入。我将称之为**冯·米泽斯的定义论题**（von Mises' definitional thesis）。他在这方面所援引的例子是功（work）的力学概念。当然了，在日常语言中我们可以以多种方式使用"功"这个字，但是在力学中我们把功定义为力乘以距离，或者更为精确地，我

们设定

$$W_a^b = \int_a^b F \cdot \mathrm{d}s$$

其中 W_a^b 是物体在保守力场 $F(x)$ 内从 a 移动到 b 所做的功。通常被看做功的很多东西都被这个定义给排除在外了，例如写作一本书所需的功、稳当地端着一盘满满的三明治以便让客人可以随意取食而做的功，等等。这个来自日常语言的含糊的概念现已得到了限定，并借助定义变得精确。

根据冯·米泽斯的观点，完全相同的做法在概率方面也适用。一开始，我们当然可以使用来自日常语言的含糊的概率概念，可是出于科学的目的，必须借助定义使它变得精确。这一点是通过概率的极限频率定义实现的。这个定义排除了概率在日常语言中的一些用法，这些用法均不能为概率界定一个聚合。但这算不上什么坏事，恰恰相反，排除一些不适合于数学论述的关于概率的含糊用法是有正面作用的。冯·米泽斯把这种论证方法概括如下：

> 例如，“赢得一场战斗的概率”在我们的概率理论中是完全不可接受的，因为我们想不出它究竟属于哪个聚合。概率论不能被用到这个问题上，就好像功的物理学概念不能被用到对演员在戏中说台词时所做的“功”的计算上一样。
>
> (von Mises, 1928: 15)

冯·米泽斯于 1928 年明确表述了他的这种观点，在当时来说他持这种观点是有充分理由的。那个时候除了使用观测频率外，估算概率的唯一方法就是使用无差别原则了，而该原则会导致无法解决的悖论也是众所周知的。然而，到了 1930 年至 1931 年间，开始有关于新的主观进路的论文被刊载出来，它们给出了一种以置信度来测度概率的方法，通过这样的方式，概率公理可以从似真的一贯性条件中推导出来。这些新成果表明，可以把定量概率和数学演算推广到很多不涉及聚合的场合。让我们来考虑冯·米泽斯本人所举出的两个事例。就德国是否会在将来的某个时候牵涉进一场与利比里亚的战争进行打赌是不可能的，因为要设定这样的一场赌博是绝不可能的。然而，我们只要对这个例子作出改变，转为求取关于德国会在今后 50 年内牵涉进一场与利比里亚的战争的概率，这下便能以标准的方式引入一个主观概率。如果一场战斗预定在明天开始，我们无疑能够就它的结果进行打赌，因而冯·米泽斯的第二个例子也马上可以归入主观理论的

领域。

另一个对频率理论的相关批评就是，它没有论述概率在归纳和认证中的作用。这个反对意见是德·菲耐蒂在一篇论述冯·米泽斯的文章里提出的："如果说概率论具有某种最重要的哲学价值的话，也只能是通过把这样的任务指派给它来体现，即深化人们对归纳推理的理解，为归纳推理作出说明或给归纳推理进行辩护。冯·米泽斯没有做到这一点。"（de Finetti，1936：361）冯·米泽斯又再回应说他同意这种看法，认为他的理论确实没有这方面的论述。正如他在他那本1928年出版的书的德文版第三版的1950年的前言中所说：

> 根据这本书的基本观点，概率论在对现实世界的应用中本身就是一门归纳科学；它的结论和公式不能起到为真正的归纳过程确立基础的作用，更不用说为归纳科学的其他任何分支——比方说广义相对论——的似真性提供以数字表示的评价了。
>
> （von Mises，1950：ix）

关于归纳和认证的重要问题自然是需要讨论的，但概率的数学演算并不一定就是处理这些问题的正确工具。比如说，关于某一假说被证据认证的判断在本质上可能是定性的而非定量的。

现在让我们来检视一下冯·米泽斯的定义论题，即一门精确的数理科学的所有概念都应该通过显定义来被引入。他关于力学中功的概念的例子的确表明某些概念是以这种方法来被引入的，但这适用于一个数理理论的所有概念吗？毕竟，如果我们要定义一个概念，那是必须借助其他概念的。例如，功的概念就是借助力和距离的概念来定义的。因此，如果我们要求所有的概念都要得到定义，那是否将会陷入无穷倒退或恶性循环呢？此外，除了借助显定义，似乎还有另一种引入概念的方式。例如，我们可以把力和质量作为初始概念来推演牛顿力学，并用一组公理来刻画它们。类似地，我们也可以把概率作为初始概念，并用相关理论的公理来刻画它。克拉默（H. Cramér）（Cramér，1946）采纳了这种方式，并对冯·米泽斯的概率的显定义作了如下的批评：

> 有些著述家试图引入一个直接以特性的频数比为基础的公理系统。这个学派的主要倡导者是冯·米泽斯……他把一个事件的概率定义为当 n 趋向于无穷大时那个事件的频率 v/n 的极限。这个极限的存在——在严格的数学意义上——被假定为该理论的第一条公理。尽管毋庸置疑地，这种类型的定义乍看起来似乎是非常有吸引力的，但是，它也包含了某些数学难题，从而使

> 它在很大程度上明显地缺乏简单性。除此之外，在这样所提出的概率定义中经验成分和理论成分兼而有之，而在现代的公理化理论中通常都会避免这种情况的出现。比如说，可以拿它来跟把一个几何点定义为一个无限缩减其尺寸的粉笔点的极限的做法加以比较，因为在现代的公理化几何学中通常也不会这样做的。
>
> （Cramér，1946：150）

请注意，有意思的是，罗素（Russell，1914：119－120）在他的《我们关于外间世界的知识》（*Our Knowledge of the External World*）一书中其实就是主张用一种与克拉默在此所描述的相差不远的方式来定义点的。而另一方面，克拉默是正确的，自从希尔伯特的《几何学基础》（*Foundations of Geometry*）于1899年问世以来，现代大多数对于几何学的论述其实都是把点作为以公理化方式刻画的未加定义的初始概念来引入的。

冯·米泽斯可能不会反对以下的想法：在一门数理科学中存在着一些基本概念——例如力学方面的力和质量或者几何学方面的点和线，这门科学的其他概念——例如力学方面的功或者几何学方面的四边形——是依据这些基本概念来得到定义的。然而，我确信他会补充说：如果该理论将会成为经验科学的一个分支而不仅仅是纯数学，则有需要给这些基本概念提供以可观察物为依据的操作定义。冯·米泽斯在他的那本初版于1928年的书的德文版第三版的1950年的前言中对于他的操作主义给予了清楚的说明，其中他写道："正如水银柱的长度是对于温度的'测度'一样，重复事例（repetitions）的相对频率就是对于概率的'测度'。"（von Mises，1950：viii）

冯·米泽斯的操作主义的/实证主义的想法来源于他极其仰慕的马赫（E. Mach）。在提出了他认为有必要给概率下定义的看法之后，冯·米泽斯补充道："关于……在精密科学中概念是如何形成的这个一般性问题的最好的信息可以在E. 马赫那里找到……本书所表达的观点与马赫的见解在本质上是一致的。"（von Mises，1928：225）冯·米泽斯后来还曾在其文章"恩斯特·马赫与经验主义科学观"（Ernst Mach und die empiristische Wissenschaftsauffassung）（1938）中对马赫的哲学作过充满溢美之词的叙述，而且又在他论述实证主义的书的概要中写道："作者是马赫的虔诚信徒。"（von Mises，1940：524）这些赞颂确实是恰如其分的，因为冯·米泽斯在逐渐形成他的概率理论的过程中所遵循的正是马赫阐发力学的模式。

在其所著的《力学》（*Science of Mechanics*）一书中，马赫批评以前那些对于牛顿力学的论述未能为质量概念提供一个恰当的说明，而且他还力图通过给质量

提出一个以可观察物为依据的操作定义来弥补这个缺陷（Mach，1883：264－271，298－305）。马赫给出了三个被认为是得到了观察资料证实的实验性命题，然后再把它们作为他关于质量和力的定义的基础。在我看来，冯·米泽斯对概率的说明显然是在仿效这种对力学的说明，因为他首先引入了被认为是得到了观察资料证实的统计频率稳定性定律，然后再把该定律作为他的概率定义的基础。[①]

马赫的实证主义和操作主义现已受到相当多的批评，而对于观察与自然科学的理论概念之间的关系，如今大部分科学哲学家更为偏爱一种与之颇为不同的说明。人们不再普遍认为理论概念应当直接依据可观察物来定义，相反，人们更为广泛地认为这样一些概念应当在最初的时候是不加定义的，然后再通过较为间接的方式与经验相联系。在第七章我将以一种非操作主义的思路描述自然科学的理论概念是如何能够与观察和实验相联系的，我会举马赫关于牛顿式的质量的例子来作说明。到时接下来我还将表明这种非操作主义的进路是如何催生出一种与冯·米泽斯关于概率的说明不同的说明的。这种新的说明是倾向理论的其中一个版本。

概率的极限频率定义被认为是一种依据可观察概念（频率）对理论概念（概率）所下的操作定义。然而，可以断言，由于在无限序列中使用了极限，所以在观察和理论之间它未能提供一种联系。众所周知的是，对于任何有限的 n，无论 n 有多大，两个序列有可能在前 n 位是相一致的但收敛于相当不一样的极限。假设我抛掷一枚硬币 1000 次，正面朝上的观测频率约为 1/2。这是完全相容于与 1/2 相差非常大的极限的。由此可以认为，冯·米泽斯的定义未能将理论和观察联系起来。

先前当我们考虑“有限的经验聚合是否可以用构成数学聚合的无限序列来表征”这个问题的时候，我们遇到了一个十分类似的反对意见。冯·米泽斯对于该难题的回答是：这样的一些用无限的东西来对有限的东西所作的表征在数学物理学中是随处可见的，而他的目标只在于以一种严密的方式来表述概率论，就像用来表述数学物理学除力学外的其余部分的方式那样严密。想必他也不可能期望使它更为严密了。我们可以通过举例来说明这个观点，那就是拿冯·米泽斯的概率的极限频率定义来跟极限在数学物理学中有代表性的用法加以比较。为此目的，让我们来考虑一下流体中某一点的密度是如何得到定义的。这个例子对于冯·米泽斯是极其合适的，因为除了概率方面的研究成果，他还对流体力学作出了重要的贡献，实际上他提到过一个有关的例子（von Mises，1928：84－85）。

图 5.3 是对流体中的一点 P 的密度 ρ 的定义的图示。如图 5.3（a）所示，我们取一个包含 P 的小体积元 δV，并假设它的质量为 δM。这样，我们把 P 的密度 ρ 定义为当 $\delta V \to 0$ 时 $\delta M/\delta V$ 的极限。看来这完全类似于冯·米泽斯的概率的极

限频率定义，只不过这里我们有一个量是越变越小而不是越变越大的。然而，可以认为，流体力学中的情况在某些方面更为糟糕，因为我们知道，流体并不是连续的，实际上是由分子构成的。因此，当 δV 足够小以至于与分子的平均自由程可比时，δM 的值会随着分子的随机运动而剧烈地波动。可见，如果对于 δV 的那些相继变小的值，我们真的能记录下 δM 的一系列读数，那么所出现的结果在某种程度上就会像图 5.3（b）所展示的那样。在节段 BC 内，$\delta M/\delta V$ 似乎确实收敛于一个确定的值，但是，随着 δV 变得更小而进入了区域 AB 时，由于在此区域内它与分子的平均自由程可比，所以 $\delta M/\delta V$ 会开始以不规则的方式振荡，使得整个朝向确定极限的趋势不复存在。这并不是一个纯粹的学术观点，因为连续流体力学的确会在分子的物质结构不可被忽略的情况下失效。对于气体来说，在非常低的气压下，例如在高层大气中，事实就是如此。更为精确的计算显示，连续流体力学在距离地球表面 200 千米以上的地方是不适用的。诸多颇为不相同的须考虑的因素（包括分子间的交互作用）表明，连续性假设对于冲击波是不成立的。

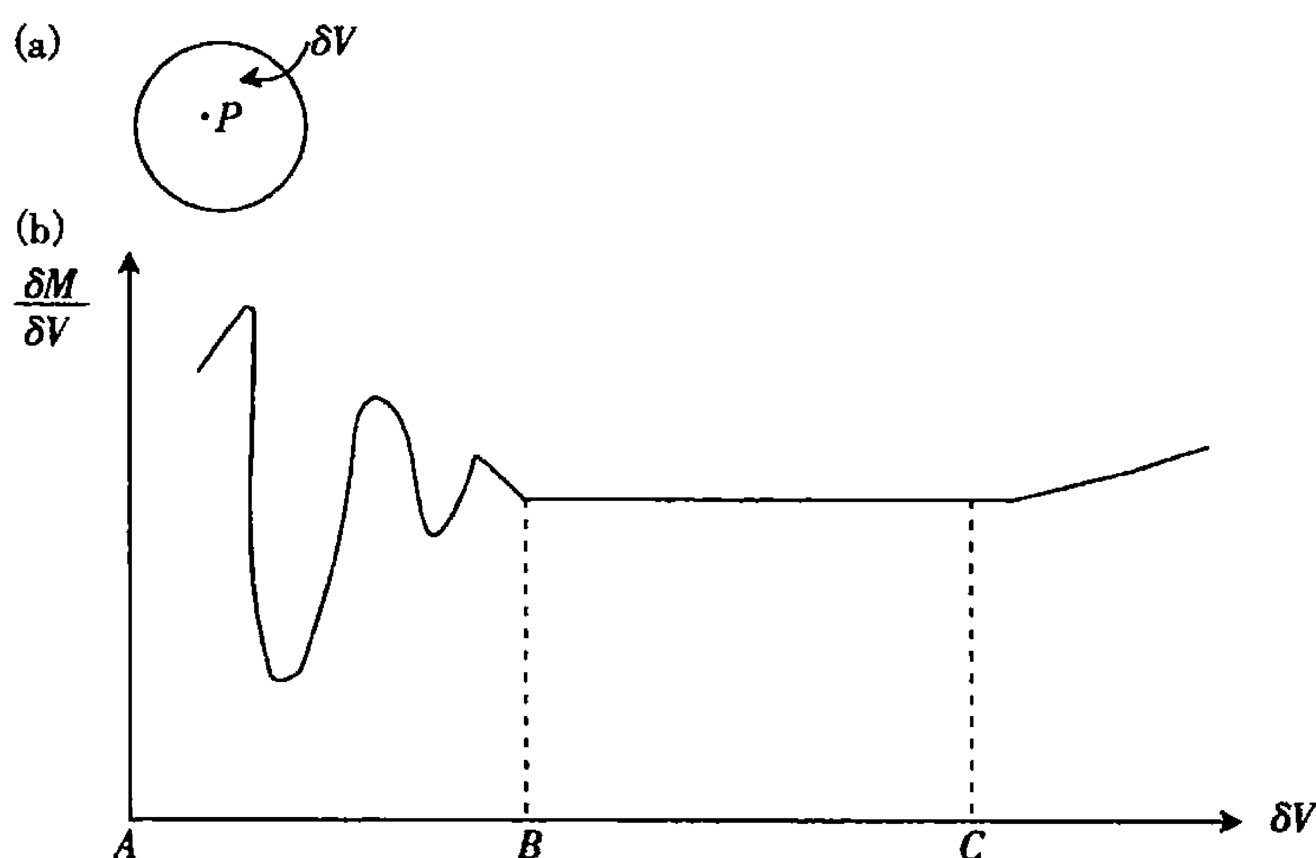


图 5.3　某种流体中的一点 P 的密度 ρ 的定义

因此，关于极限，流体力学中的情况看来比概率的频率理论中的情况更为糟糕。虽然我们不能无限次地抛掷一枚硬币，但是据我们所知，反正在我们抛掷的时间内，m（正面朝上）$/n$ 都将持续收敛下去，而体积 δV 的大小是不能低于某个限度的，否则我们不可以用来取 $\delta M/\delta V$ 的极限。说实在的，在概率的频率理论方面也可能存在着相应的困难。随着我们对那枚硬币进行不间断的抛掷，它无

疑会逐渐地磨损，而这有可能改变 *Prob*（正面朝上）的值。然而，事实上，极限在流体力学中仍然被使用和仍然被认为是完全不成问题的，而在概率的频率理论中与极限有关的情况看来的确不会更为糟糕，或许甚至会更好。因此，冯·米泽斯断定：

> ……一个基于“无限聚合”概念的理论的诸结果能通过某种在逻辑上不可定义但在实践中足够精确的方式被应用于观察资料的有限序列。理论和观察的关系在这种情况下与在所有其他自然科学中本质上是一样的。
>
> （von Mises，1928：85）

冯·米泽斯的这个论证是强有力的，尽管如此，德·菲耐蒂还是坚持认为概率论与其他自然科学之间在以下方面存在着差别。他写道：

> 常常有人认为，只要注意到那种使概率和频率之间的关系变得精确的不可能性，相似于在所有实验科学中遇到的将理论的抽象概念与经验实在确切地联系起来的实践上的不可能性，就可以避开这些批评意见。这种相似性在我看来是虚幻的：在其他各门科学中，人们所拥有的是这样一种理论，它可以确定地和准确地断言与预测将会有什么事情发生，如果理论是完全准确的话；在概率演算中，正是这种理论本身迫使我们承认所有频率的可能性。在其他各门科学中，不确定性其实是来自于理论与事实之间的不完善的联系；在我们的情况中，恰恰相反，它并非源于这种联系，而是源于理论本身的主体部分……
>
> （de Finetti，1937：117）

再次考虑一下关于连续流体力学的事例，可以说明德·菲耐蒂在此所表达的意思。假设我们用一个关于水在某种特定的情况下是如何变化的理论的主体部分来构造一个模型，假设我们能够借助经验来确定这个模型中的参数的值，也能够解相关的方程，那么我们的模型将会准确地告诉我们水应该是如何变化的。当然了，出于种种原因，该模型仅仅是对于所发生的事情的近似刻画，但该模型所告诉我们的依然是精确的。正如德·菲耐蒂所言，该模型是“这样一种理论，它可以确定地和准确地断言与预测将会有什么事情发生，如果理论是完全准确的话”。

现在让我们以此与概率论相对照。假设我们以抛掷一枚具有对称性的硬币这种最为简单的情况构造模型，我们假定各次抛掷都是独立的而且 *prob*（正面朝上）=1/2。这样我们就能够推演出（式 5.1）：如果在 n 次抛掷中正面朝上出现

了 m 次，那么有95%的概率支持

$$\left|\frac{m}{n}-0.5\right| \leqslant \frac{0.98}{\sqrt{n}}$$

这里的关键之处在于，我们不能从该模型中推论出这种关系确实成立，而只能认为它有95%的概率会成立。因为，m/n 在区间 [0，1] 之内的所有取值都是有可能的，尽管与0.5相差相当大的某一取值的概率将会非常低。就像德·菲耐蒂所说的，"在概率演算中，正是这种理论本身迫使我们承认所有频率的可能性"。

依我看，德·菲耐蒂在这里的确是成功地表明了"理论的抽象概念与经验实在"之间的关系在概率论中和在物理学的其他分支中是有差异的。在概率论方面，要把理论和实在联系起来还需要另外一些假设。我将在第七章指出，这里所需要的是一个针对**概率陈述的证伪规则**(falsifying rule for probability statements)。

本节表明了数学上的收敛性公理是如何能由经验上的统计频率稳定性定律得出的，以及收敛性公理是如何导出概率的极限频率定义的。这个定义催生了一整系列的哲学问题，我们在这一节已经用了大部分的篇幅来讨论它们。数学公理的推导一开始并没有导致严重的问题。然而，为了完成冯·米泽斯的计划，我们现在必须检视一下第二条数学公理（随机性公理）（axiom of randomness）是如何能由经验上的排除赌博系统定律得出的。原来，随机性公理的表述竟牵涉到了数量十分可观的数学难题。这些难题均已被克服，但也只是借助了一些颇为精妙的数学新成果才被克服的。我将在下一节"关于随机性的问题*"探讨这些问题。最后一节"冯·米泽斯的公理与柯尔莫哥洛夫公理的关系*"会对频率理论提出一个与我们对主观理论所提出的一样的问题，亦即这些公理是如何与标准的柯尔莫哥洛夫公理相关联的。我们将会再次发现一些不同之处。相应地，本章最后这两节所关注的主要是数学方面的内容。我们到目前为止已经探讨了关于频率理论的大多数哲学问题，它们构成了倾向理论提出的背景，因而对进一步的数学问题不感兴趣的读者可以直接进入第六章。

第四节　关于随机性的问题*

经验上的排除赌博系统定律粗略地说明了使用赌博系统来改善人们获胜的机会是不可能的。现在我们的问题就在于为这个定律制定一个适用于数学聚合的版本，它将被视为相关数学理论的第二条公理——随机性公理。为了看清楚这项任

务所面临的困难，让我们首先以一种“素朴的”形式来表述这条公理，这种做法实际上是行不通的。让我们把 C 看做一个具有属性空间 Ω 的数学聚合，并且让我们假设 C 满足第一条公理（收敛性公理）。于是我们有：对于任何属性 A（$A\subseteq\Omega$），A 在 C 中的概率 $Prob(A\mid C)=\lim_{n\to\infty}m(A)/n$。让我们进一步把**位次选择**（place selection）或**赌博系统**（gambling system）定义为一种用以选择 C 的一个子序列 C' 的规则。赌博系统可以被认为是成功的，如果 $m(A)/n$ 在 C' 中的极限频率（比方说 p'）不同于它在 C 中的值——即 $Prob(A\mid C)$ ——的话。p' 是大于还是小于 $Prob(A\mid C)$ 是无关紧要的，只要它们之间有差别。因为，如果 $p'>Prob(A\mid C)$，我们就下注赌 A 出现于子序列 C' 的元素中，而如果 $p'<Prob(A\mid C)$，我们就下注赌 A 不出现于子序列的元素中。依据这些定义，我们可以把我们的随机性公理的“素朴的”（与错误的）版本表述如下：在任何借助位次选择从原聚合 C 所获得的子序列 C' 中，$m(A)/n$ 必须继续保持收敛于其原值，即 $Prob(A\mid C)$。

这条“素朴的”公理的麻烦在于，除了在每个属性的概率要么为 0 要么为 1 这种无足轻重的情况下之外，它使聚合的类变为了空的。因为假设属性 A 有一个大于 0 而小于 1 的概率，按照第一个条件，A 必须出现无数次。这样，我们可以选择一个只是由属性 A 所构成的子序列。对于这个子序列，我们有 $\lim_{n\to\infty}m(A)/n=1\neq Prob(A\mid C)$，因而我们的素朴的随机性公理并不成立。显然，为了避免出现这种不合意的结果，我们必须以某种方式对可允许的位次选择或赌博系统的类给予限定。问题就在于怎样做到这一点。

冯·米泽斯本人建议我们作出以下规定：“对‘原序列的某个元素是否属于所节选的序列’这一问题的解决应该独立于相应的观察结果，亦即在关于这个结果的任何消息为人所知以前。”（von Mises, 1928: 25）毋庸置疑的是，就实际的打赌情境而言，这是非常合理的。赌场是不允许人们在其结果揭晓以后就轮盘赌的某一局下注打赌的。然而，我们现在所关心的不是与经验聚合有关的实际程序，而是与数学聚合有关的数学定义。在表述一个数学定义时，我们必须使用数学概念，对于某人是否知道一个特定的聚合的前 n 个元素的值，是不能考虑在内的。诚然，正如我们已经看到的，冯·米泽斯本人总是强调有必要区分数学的东西和经验的东西。此外，在目前的情况下还有另一个因素，它使得对随机性公理作精确的数学表述是可取的。

对冯·米泽斯的理论的一个批评意见是：对于随机性公理的任何恰当表述都会与收敛性公理相矛盾，从而使该理论变得不一致。为了表明这个反对意见是站不住脚的，极为可取的做法就是证明这两条公理是一致的，而为了提供这样一种一致性证明，所需要的则是只使用严格的数学概念对随机性公理所作的一种精确

的数学表述。

刚刚谈到的这个反对意见是由弗莱（T. C. Fry）（Fry，1928：88－91）和坎泰利（F. P. Cantelli）（Cantelli，1935：§§7，10，12）提出的。冯·米泽斯以他的随机性公理表明：在任何聚合 C 中，如果该公理对这一聚合成立，则二项概率公式对它也成立。因此，如果 A 是任一属性，对于它，有 $P(A \mid C)=p$,则在 C 的任意 n 个元素中得到 m 次 A 的概率由 $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ 给出。换句话说，随机性蕴涵着独立性。但是，根据弗莱和坎泰利的看法，这种独立性是与收敛性公理相矛盾的。他们的论证是这样的。运用收敛性公理我们有 $P(A \mid C)=p=\lim_{n\to\infty} m(A)/n$，其中我们照例假设 A 在 C 的前 n 个元素中出现了 $m(A)$ 次。因此，给定 $\varepsilon>0$，必有一个 N 使得，对于所有 $n>N$，p 与 $m(A)/n$ 的差值小于ε。但现在让我们来考虑该序列中紧接前 N 项的任一有限节段（比方说 $N+1$，$N+2$，…，$N+r$ 诸项）。根据二项概率公式，在这些项的每一个中得到 A 都存在着一个有限概率，即 p^r。如果我们足够长地得到一连串这样的成功事例的话，$m(A)/n$ 与 p 之间的离散将会大于 ε。可见，对于任何 N，这样的一种离散程度存在着一个有限概率，而这正好与极限定义的要求相反。

要解决这个难题，我们只需对“在 C 的第 $N+1$ 位，…，第 $N+r$ 位得到 A 存在着一个概率 p^r”这一断言的意义作出考虑。在冯·米泽斯看来，它的意义是这样的：如果我们以构造 C 的同样方式构造一个由聚合 $C^{(1)}$，$C^{(2)}$，…，$C^{(i)}$，…构成的无限序列，那么那些在第 $N+1$ 位，…，第 $N+r$ 位有 A 的聚合的极限频率将会是 p^r。这与聚合 C 在所有这些位次上确实并非都有 A 不是一点也不相容的。仅当我们不但假定对于每个 $C^{(i)}$，A 的相对频率收敛于 p，而且假定这种收敛在 $C^{(i)}$ 上是均匀的，我们才会得出矛盾。

我认为这令人满意地解决了那个难题，但是对于随机性公理的数学表述是否真的可以与收敛性公理相一致，可能仍然存在着一些疑虑。在 1919 年至 1940 年间，这些与随机性相关的问题引起了很大的关注。冯·米泽斯的概率的频率理论当时很受维也纳学派欢迎，因而维也纳学派的成员以及与该学派有联系的思想家都对这个问题给予过关注。在所有为这个问题作出过贡献的那些人的名单当中包含了丘奇（A. Church）、科普兰（A. H. Copeland）、多格（K. Dörge）、费勒、卡姆克（E. Kamke）、冯·米泽斯、波普尔、莱辛巴赫、图尼埃（E. Tornier）、魏斯曼（F. Waismann）以及瓦尔德（A. Wald）这几个人的名字。不过，我并不是打算对这段历史作详尽的说明，而是要重点介绍瓦尔德和丘奇的工作，在我看来，把他俩的研究成果结合起来可以达成一个对原问题的令人满意的完整的解决方案。

在阐述瓦尔德和丘奇的成果时，为了简单起见，我将把讨论限定于具有属性空间 {0，1} 的数学聚合，即 0 和 1 的无限序列。当然了，相关的结论是可以

被推广到具有其他类型的属性空间的聚合的。瓦尔德的研究成果见于他 1937 年的论文《聚合概念的一致性》［“The Consistency of the Concept of Collective”(“Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivsbegriffes”)］。1938 年，他在一篇较短的同名文章里又给出了相同的结论（但没有给出证明）。这篇文章以德文原文重印于瓦尔德的论文选集，因而是比较容易找得到的。还有的就是，冯·米泽斯(von Mises，1964a：39 -43）曾以英文对他在这个问题上的工作成果作过一个概述。

瓦尔德的思路并不是尝试为位次选择或赌博系统定义一个明确的允许类(allowable class)，而是尝试去考查以各种不同的方式来选择这个类的成效。他的主要定理如下。如果我们把讨论的范围限定于位次选择或赌博系统的一个可数类（denumerable class)，那么，那些具有任何指定的概率分布的聚合或随机序列就存在着一种连续统无限性（continuum infinity)。因此，随机序列根本就不是罕见的或甚至不存在的，它们比呈现出规则性的序列要多得多。这个结论在位次选择或赌博系统的类的选取方面仍然留有一定的随意性，但瓦尔德试图借助两个须考虑的因素来减轻这种随意性。首先，在任何特定的问题中，对于赌博系统的可数集（denumerable set)，我们想要考虑的肯定不会多于一个。第二，让我们假定我们正在某个逻辑系统内——例如（引用他举的例子）在罗素和怀特海在《数学原理》中所构造的系统内——表述我们的理论。在这样的一个系统内，我们只有一个公式的可数集，因而只能对一个数学规则的可数集加以定义。

瓦尔德的第二条意见可能对丘奇有所启发，使他想到了一种用于更为精确地规定允许的赌博系统类的方式。丘奇当时手头上有个可供使用的数学理论，这个理论近年来得到了包括他自己在内的很多人的发展，已经是完全独立于概率论中的任何问题的了。这就是**递归函数**(recursive function）理论。让我们把**可计算函数**(computable function）定义为其值对于任何特定的输入都可以通过使用某种事先规定的纯机械方法在有限的时间内被计算出来的、从自然数到自然数的函数。当然了，这对于该概念仅仅是一种非正式的说明，而它能否被更为精确地刻画其实也是个问题。递归函数类曾以精确的数学方式得到定义，丘奇（Church，1936）认为我们可以将可计算函数等同于递归函数。这就是著名的**丘奇论题**(Church’s thesis)。支持其真实性的证据很快就增加了起来，因为所有其他基于诸如λ-可定义性（λ-definability)、图灵机（Turing machine)、后处理（Post process)、马尔可夫算法（Markov algorithm）等多种不同思路的精释可计算函数的方式最终均被表明是可证明地等价于递归函数的。在他的短文《论随机序列概念》(“On the Concept of a Random Sequence”)（1940）中，丘奇把这些新阐发的想法用于探讨冯·米泽斯的频率理论所产生的问题。在陈述了对于聚合的存在的常

见反对意见之后，接着他说道："可见，一个**赌博系统**[Spielsystem（gambling system）] 在数学上不应该被表征为一个函数，更不应该被表征为函数的一个定义，而应该被表征为一种适用于函数值的计算的能行算法。"（Church，1940：133）。

这种观点一提出肯定就被公认为是正确的。一个赌博系统终究也只不过是一种告诉我们在每一局可否下注打赌的规则。这样的一种规则一定要在有限的时间内传达它的指令；换句话说，它必须是一种可用于判定我们是否应该下注打赌的能行程序。实际上，我们可以把任何赌博系统都看做是赌徒随身携带的一台微型计算机。他把局数 n 和先前的 $n-1$ 局的结果输入计算机，随后计算机就会输出一个指令，告知他是否应该在那局把赌注压在一种特定的属性上。这与我们关于赌博系统的直观想法是基本一致的，而且表明了这种想法是如何可能从可计算函数的角度得到精释的。因此，如果我们接受丘奇论题，我们就可以依据递归函数来定义赌博系统。丘奇正是这样做的，他的做法如下。

令我们的原聚合为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，其中我们假定，对于所有 n，a_n 为0或为1。我们也可以把赌博系统表征为一个0和1的无限序列，比方说 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$，其中 $c_n=1$ 意味着选择 a_n，而 $c_n=0$ 则意味着拒斥 a_n。我们可以说 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots\}$ 是一个**递归赌博系统**(recursive gambling system)，仅当 $c_n=\phi(b_n)$，其中，

（1）$b_1=1$，$b_{n+1}=2b_n+a_n$；

（2）ϕ 是正整数的一个递归函数。

并且如果对于任何整数 n，都存在 $c_n=1$，则整数 n 在数目上是无限的。（在1中对 b_n 的引入仅仅是作为一种手段，用以确保我们关于是否要选择——比方说——a_n 的决定既可以取决于 n，也可以取决于 a 序列先前的元素。）

我们现在可以把随机性公理表述如下：

> **随机性公理**：令 C 为一个收敛性公理对其适用的聚合。令 A 为 C 的一个任意的属性，对于它，$P(A \mid C) = \lim_{n\to\infty} m(\text{A})/n = p$。令 C' 为 C 的一个借助递归赌博系统选择的子序列。那么在 C' 中，$\lim_{n\to\infty} m(\text{A})/n$ 存在并且等于 p。

因为递归赌博系统只存在一个可数数（denumerable number)，所以可以从瓦尔德的定理推导出：具有任何指定的概率分布并满足上面所定义的收敛性公理和随机性公理的聚合存在着一种连续统无限性。

瓦尔德和丘奇的工作以这种方式给予了冯·米泽斯的理论一个严格的数学基础。它给冯·米泽斯关于赌博系统的直观概念提供了一种非常似真的精释，由于

这种精释，这两条公理才能得以被表述并被证明为一致的。尽管取得了这种成就，但丘奇谈到还有一个古怪的问题有待解决。

上面对于随机序列的存在的证明在包括康托尔集合论（Cantorian set theory）的基本构想在内的普通的经典数学中是完全有效的。但是经典数学已经受到了构造主义者的批评，而且上述的证明至少在构造主义数学的某些版本中是不成立的。根据构造主义者的观点，一个数学客体可以被认为是存在的，仅当某种程序得以制定，它通过这种程序能被构造出来。如果我们将此用到无限序列上，那看起来好像我们只有在这样的情况下才能说一个无限序列存在，亦即我们能够明确规定一个用于生成该序列的一连串元素的规则。故此，例如说，π 的十进制展开式可以合法地被认为是存在的，是因为我们能够明确规定一个用以生成一连串数字的规则。但现在请考虑，在给定这种似真的构造性标准的情况下，一个随机序列是否能被认为存在呢？答案似乎是“不能”。假设我们用构造性方法明确规定了一个用以生成这种序列的规则，那么，那个规则可以用来给出一个成功的赌博系统，因而那个序列就不是随机的了。因此我们得出了一个奇怪的结果。在假定经典数学为真的情况下，随机序列被证明比非随机序列更为常见，因为随机序列有连续统无限性而非随机序列只有可数无限性（denumerable infinity）。然而，在某些类型的构造主义数学中，是不存在随机序列的。可见，随机序列真的存在吗？这是一个必须留待读者考虑的难题。

第五节　冯·米泽斯的公理与柯尔莫哥洛夫公理的关系*

就像在论述主观理论时的情况那样，我们现在要来检视一下冯·米泽斯的公理（正如前面所表述的）是如何与柯尔莫哥洛夫公理相关联的，因为后者如今为数学家们所普遍接受。故此，让我们假定冯·米泽斯的公理为真，并看看我们是否能推导出柯尔莫哥洛夫公理。第四章所给出的两条公理是柯尔莫哥洛夫公理的一部分，我们将首先表明它们可以从收敛性公理推导出来。

在陈述上一章的那些公理时，我在这里会把事件 E，F，…替换为属性 A，B，…，并把确定事件替换为属性空间。经过这些改动之后，我们有：

公理1：对于任何 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，并且 $P(\Omega)=1$。

假定收敛性公理为真，我们有 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty} m(A)/n$。于是，$0 \leqslant m(A)/n \leqslant 1$。因此，取极限，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。$m(\Omega)/n=n/n=1$。因此，取极限，$P(\Omega)=1$。

公理2（加法律）：如果 A，B 是两个互斥的属性，那么 $P(A)+P(B)=P(A \vee B)$。

如果 A，B 是两个互斥的属性，那么 $m(A)/n+m(B)/n=m(A \vee B)/n$。因此，

通过取极限和应用收敛性公理，我们有 $P(A)+P(B)=P(A\vee B)$，正如所要求的那样。

这在有限可加性方面证明了加法律。然而，就像在论述主观理论时的情况那样，我们可以提出这样一个问题，即加法律的适用范围能否被扩展至可列可加性。事实上，可列可加性是不能从冯·米泽斯的公理推出的，这一点我马上就会表明。[②]要探明这个问题，我们首先便面临一个难题，亦即在任何经验聚合中属性空间都将会是有限的。因此，有一点是不大明确的，那就是，我们如何能够引入无限的属性空间，只有对于无限的属性空间，那个关于可列可加性的问题的提出才有意义。依照冯·米泽斯的一般性策略，我们需要找出一种场合，在这种场合中巨大的有限的量可以合理地被无限的量近似地表征。让我们来考虑以下这种情况。有一个汽车引擎制造者，他给接连生产出来的每一个引擎从1开始编上号码。假设在一个给定的时刻我们随机挑选了一辆有这种引擎的汽车，并记下了该引擎的编号。在我们挑选的时候，将有一批引擎被生产出来并被安装到车上，其数量为某个有限的数目，比方说 N。因此，对于 $1\leqslant n\leqslant N$，我们选中某个编号 n 的概率由 $1/N$ 给定。假设我们以同样随机的方式接连不断地选取引擎编号，由于 N 很大而且实际上在不断地增大，所以我们可以进行初步近似，把 N 看做无限的，亦即将属性空间 Ω 视为 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，并取 $P(n)=0$。假设我们假定相应的数学聚合具有可列可加性。那么，我们就会有 $P(\Omega)=P(\{1, 2, \cdots, n, \cdots\})=P(1)+P(2)+\cdots+P(n)+\cdots=0$。但是，根据公理1，$P(\Omega)=1$。这是一个矛盾，它表明了可列可加性对于那些满足冯·米泽斯的两条公理的聚合并不总是成立的。

在德·菲耐蒂1936年论述冯·米泽斯的概率理论的那篇文章中，关于可列可加性的这个问题大概是唯一一处他同意冯·米泽斯的地方。德·菲耐蒂写道：

> 而在结束这一部分时，我还是要指出，我们对于某个定理的意见是一致的，那就是，我们都同意把全概率定理推广到可数类，尽管这种做法得到了很多著述家的支持，但也恰恰是没有得到辩护的，既没有根据冯·米泽斯的理论得到辩护，也没有根据我的观点得到辩护。
>
> (de Finetti, 1936: 364)

我已经论证表明，可列可加性在德·菲耐蒂的理论中实际上是得到了辩护的，但在冯·米泽斯的理论中却是没有得到辩护的。此外，在我看来，这对于冯·米泽斯的理论而言是一个难题，因为我认为，能够为当前所使用的全部数学工具辩护对于任何关于概率的哲学理论来说都是一个优点。

冯·米泽斯也意识到了这个问题，在其随后的著作中他试图通过把可列可加性设定为除收敛性公理和随机性公理之外的第三条公理来解决该问题［参见 von Mises，1964a：12，其中的等式（2）也就是可列可加性公理］。从数学的观点来看，这是把问题给解决了，因为由此得到的理论是一致的。不过，这样却无形中损害了冯·米泽斯对这几条公理的总体上的哲学辩护。根据冯·米泽斯的看法，每一条公理都应该是数学抽象物，是对经验定律的理想化描述。这个说明对于收敛性公理和随机性公理是似真的，但却根本不适用于他追加的可列可加性公理。我将在第七章表明，冯·米泽斯的理论中的这个缺陷在概率的倾向理论中可以被克服。

现在我们要来考虑：

公理3（乘法律）：对于任意两个属性 A，B，$P(A \& B)=P(A|B)\ P(B)$。正如我们在上章所见，柯尔莫哥洛夫是通过定义而不是公理来引入条件概率的。不过，我们认为，使用公理的做法更为可取。从形式上说，这其实不会造成太大的差别。我们现在一定要看一看我们能否在冯·米泽斯的理论中推导出上述那条公理。为了做到这一点，我们首先必须做的就是探讨一下条件概率在冯·米泽斯的理论中的意义。

正如我们已经看到的（本章第三节），在冯·米泽斯的理论中，任一属性 A 的概率总是以某个聚合 C 为条件的，所以我们应该把它写为 $P(A|C)$。然而，上面的公理3 中的条件概率是 $P(A|B)$，这使得 A 的概率并非以一个聚合为条件而是以一个属性 B 为条件。可见，由于到目前为止 $P(A|B)$ 是尚未被赋予意义的，所以我们只有赋予它意义才能对公理3 作出探讨。事实上，$P(A|B)$ 是被定义为 $P(A|B \& C)$ 的，其中 $B \& C$ 是以如下方式从 C 得到的一个聚合。我们从 C 中选取属性 B 出现在其中的那些项，因而由此得到的序列就是 $B \& C$。当然了，我们接下来必须证明刚刚以这种方式被定义的 $B \& C$ 确实是一个聚合，亦即满足收敛性公理和随机性公理。事实上，我们将会在证明公理3 成立的过程中表明这一点。然而，还有一个首先需要考虑的地方。假设 B 出现在聚合 C 中的次数只是一个有限的数目，这样的话，$B \& C$ 也将只有有限个元素，更加不会是一个聚合，因为一个聚合是一个无限序列。现在如果 B 在 C 中只出现了有限次，则$P(B|C)=0$。因此，如果明确规定 $P(B|C)\neq 0$，我们就能消除这种棘手的情况。不过，条件 $P(B|C)\neq 0$ 事实上是不必然具有约束性，因为可能存在着这样一种情况，在这种情况下 B 出现了无数次，但仍然会是 $P(B|C)=0$。然而，为了避免数学上的复杂性，我们会假定 $P(B|C)\neq 0$，尽管我们还是应该指出，通过使数学复杂化，是有可能在频率理论中引入那些以具有零概率的属性为条件的概率的。

我们现在可以继续进行我们对公理3 的证明，同时我们的证明会表明 $B \& C$

确实是一个聚合。任意地选择 n，并假设在 C 的前 n 位 B 出现了 $n(B)$ 次。因为根据假定，$P(B \mid C) \neq 0$，所以当 $n \to \infty$ 时，$n(B) \to \infty$。假设在 B & C 的前 $n(B)$ 位，A 出现了 $m(A)$ 次，我们首先必须表明的是 $\lim_{n(B)\to\infty} m(A)/n(B)$ 存在。现在如果 A & B 在 C 的前 n 位出现了 $n(A \,\&\, B)$ 次，那么 $n(A \,\&\, B) = m(A)$。由此，

$$\lim_{n(B)\to\infty} \frac{m(A)}{n(B)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \,\&\, B)}{n(B)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \,\&\, B)/n}{n(B)/n}$$

因此，依据被应用于 C 的收敛性公理，我们有

$$\lim_{n(B)\to\infty} \frac{m(A)}{n(B)} \text{存在并等于} \frac{P(A \,\&\, B)}{P(B)}$$

为了完成此证明，我们必须表明这个极限对于任何被应用于 B & C 的递归赌博系统都是不可改变的。令 g 为这样一个系统。以如下方式把 g 扩展到一个适用于 C 的递归赌博系统 g'。假设 B 到目前为止已经在 C 中出现了 $n-1$ 次，接着把 $g(n)$ 的值用于选择或者拒斥 C 的一连串相继出现的元素直到 B 再次出现为止。然后再转到 $g(n+1)$，以此类推。令根据 g'所选择的聚合为 C'，根据 g 所选择的聚合便是 B & C'。然而，依据被应用于 C 的收敛性公理，C'中的极限频率与 C 中的一样。因此，通过实施这前一部分的证明，我们可得出，B & C'的极限频率存在，而且与 B & C 中的一样。

我们现已表明，在冯·米泽斯的理论中可以推导出柯尔莫哥洛夫公理，仅当我们把讨论范围限定在有限可加性，并且我们把公理 3 的适用范围限制在 $P(B) \neq 0$ 的场合。应该指出，这个证明有一个古怪的特征。随机性公理只被用于对公理 3 的证明的下半部分，也就是用于核实 B & C'是否满足随机性公理，因而是否确实是一个聚合。因此，如果我们完全不采用随机性公理而仅仅要求聚合满足收敛性公理，那么（在接受上述限定的情况下）仍然可以推导出柯尔莫哥洛夫公理。不那么正规地说，全部的柯尔莫哥洛夫公理似乎只对应于冯·米泽斯的两条公理的第一条，在柯尔莫哥洛夫公理中是没有任何部分与随机性公理相对应的。这种情况毫无疑问是很奇怪的。这条冯·米泽斯那么强调其重要性的公理看来根本就不会出现在标准的数学公理化中。这方面的原因肯定需要进一步的探究，但不是现在，因为把进一步的讨论推迟到第七章会更为合适，这样讨论就能在倾向理论的语境中进行了。

第六章　倾向理论（一）：概述

概率的倾向理论是由波普尔（Popper，1957b）最先引入的[①]，随后他又在一系列的文章和书（Popper 1959b，1983，1990）中对它作出阐述与发展。在《科学发现的逻辑》（*Logic of Scientific Discovery*）（Popper，1934：146－214）中，波普尔所主张的是频率理论的某个版本。自从那以后他一直都是支持概率的客观解释的，但他后来的深入思考使他确信频率理论是不恰当的，因而有必要提出一种新的关于概率的客观解释。于是他给出了他的倾向理论以作为达成这方面目的的尝试。在波普尔看来，频率理论的主要缺点在于，它不能为单个事件提供客观概率，可是他认为量子力学是需要这些概率的。

波普尔所提出的一种关于概率的倾向理论已经得到了相当一部分科学哲学家的认可，他们以不同的方式发展了这种观点。因此，现在是有若干种不同的倾向理论的。正如米勒（D. W. Miller）所说：

> 任何关于科学知识的客观主义理论所面临的首要考验之一就是要提供一个关于物理概率的令人满意的见解。这里谈到的那些最早期的观点被统称为概率的频率理论，它们现在差不多都被摒弃了，已被一组同样杂乱的构想所取代，这些构想全部都把自己叫做概率的倾向理论。
>
> （Miller，1994：175）

到目前为止被考察过的那些关于概率的理论（古典的、逻辑的、主观的以及频率的）在各自的方面都存在着一个或多或少算是标准的版本，因而我可以在把注意力分散到某些可能的变体上的同时，集中精力阐述这个版本。倾向理论方面的情况是大不一样的。这里我们有“一组杂乱的构想”，不同的科学哲学家当前正从不同的方向发展着它们。这就需要一种有别于前的论述方法了。

在这一章我将着手做的第一步就是对各种倾向理论给予一个大体上的论述，并指出它们所面临的问题。这个概述远非全面的，我将限定于叙述波普尔、米勒与费策尔（J. H. Fetzer）以及还有我本人对于倾向的说明。[②]尽管这是从较多的可供选择的对象中所作的有限选择，但它应该能做到让人们对各种类型的倾向有一定的认知。自然地，我会论证支持我本人的倾向理论，可同时我也希望表明关于

倾向的各种不同说明的一些利与弊。这整个情况是相当错综复杂的，我将以介绍波普尔的倾向理论的第一个版本作为开始，按照历史的线索展开我的论述。接下来，在“单个事件能否拥有客观概率?”一节，我会考虑波普尔的这个理论是否真的可以解决关于给单个事件提供客观概率的问题。我的结论将会是：它不能，而且实际上单个事件的客观概率可能根本就不是必要的。从这一点来看，似乎我正要完全摒弃倾向理论，但实情并非如此。在“倾向理论的分类”一节，我会表明，我们使用“倾向理论”这个术语并不是单单指波普尔本人的理论，而是指任何试图发展出一种客观的但非频率的概率解释的理论。在我看来，我们之所以需要这样一种解释其实是跟单个事件是否有客观概率这个问题无关的。对倾向的这种分析导致了对倾向理论的一个归类。在“米勒、后期的波普尔及费策尔的倾向理论”一节，我会对米勒和后期的波普尔的倾向理论还有费策尔的倾向理论作出考察。这使在“倾向理论的分类”中所引入的分类得到了进一步的完善。在“倾向与因果性”一节，我会对已经得到介绍的那三种倾向理论是如何处理这整个研究进路所面临的其中一个主要问题作出考察。这个问题是关于倾向和因果性之间的关系的，涉及所谓的“汉弗莱斯悖论”（Humphreys' Paradox）。在给出了关于当前的一些倾向理论及其所面临的问题的这方面的概况以后，我在第七章会转而阐发我本人所偏爱的倾向理论的版本，它在“倾向理论的分类”所介绍的分类中被描述为“长程倾向理论”（long-run propensity theory）。

第一节　波普尔对倾向理论的引入

波普尔早在1934年就已经考虑过那个催生倾向理论的问题。这个问题就是，是否有可能引入单个事件的概率［波普尔把它们叫做**单称概率**（singular probability）］。冯·米泽斯当然是假定他的概率的频率理论为真的，因而否认这样的一些概率可以有效地被引入。他所考虑的例子是死亡的概率。毋庸置疑，我们是可以在一个——比方说——40岁的英国男人的序列中引入在41岁之前死亡的概率的。这只不过是该序列中那些死于41岁之前的人的极限频率。但我们可以考虑一个特定的40岁的英国男人（比方说史密斯先生）在41岁之前死亡的概率吗？冯·米泽斯回答说：“不行！”

> 关于某个人的死亡的概率，我们没法说些什么，即便我们详细地知道他的生活和健康状况。当“死亡的概率”这一词组谈及单独的一个人时，它对于我们来说是根本没有意义的。这就是我们的概率定义最为重要的结果之一……
>
> （von Mises，1928：11）

当然了，对于主观理论而言，要引入单称概率是很容易的。例如，史密斯先生的所有朋友可以就他死于41岁之前进行打赌，从而引入这一事件的主观概率。然而，这种步骤显然是不能使像波普尔那样的客观主义者满意的。对于他来说，关键的问题是能否引入单个事件的客观概率。

波普尔在1934年的时候之所以不同意冯·米泽斯对存在客观单称概率的可能性的否定，在一定程度上是由于他想要把这样一些概率用到他对于量子力学的解释上。为此，波普尔还考察了作为冯·米泽斯的聚合的一个元素的某一单个事件，并简单地提议说它的单称概率可以被看做等同于它在作为一个整体的聚合中的概率。对于他这个较早期的观点，波普尔（Popper，1957b，1959b）后来提出了一个由他自己构想的反对意见，而这便导致了他创立他的新概率理论。

波普尔的论证是这样的。首先考虑两颗骰子：一颗是规则的，另一颗则是有偏向性的，因而掷出特定的一面（比方说5点）的概率是1/4。现在请考虑一个几乎完全由那颗有偏向性的骰子的抛掷结果构成但却掺杂了那颗规则的骰子的一两次抛掷结果的序列。让我们取这些混杂的抛掷结果中的一个，并问那一次抛掷得出5点的概率是多少。根据波普尔较早期的建议，这个概率必定是1/4，因为那次抛掷是某个聚合的一部分，相对于它，*Prob*(5)＝1/4。但这是一个直观的悖论，因为对于那颗规则的骰子的任何一次抛掷而言，说*Prob*(5)＝1/6想必要合理得多。

摆脱此困境的一种方法就是修改聚合的概念，使得那个由那颗有偏向性的骰子的抛掷结果构成而又掺杂了那颗规则的骰子的某几次抛掷结果的序列不是一个真正的聚合。这样问题就不复存在了。这正是波普尔所做的：

> 这一切意味着频率理论家被迫要对其理论进行修正——一个看起来非常细微的修正。他现在会说，一个容许的事件序列（一个参照序列，一个“聚合”）必须总是一个由重复的实验构成的序列。或者更为一般地，他会说，容许序列必须是由一个生成条件集刻画的要么虚拟的要么实际的序列——这个集合中的条件的重复实现产生了序列的那些项。
>
> （Popper，1959b：34）

然后，几行下来，他接着写道：“不过，如果我们更为仔细地考察这个看似细微的修正，那么我们会发现它相当于从频率解释到倾向解释的转变。”（Popper，1959b：34）在这种解释中，可以认为，生成条件（generating conditions）被赋予了一种产生观测频率的倾向。正如波普尔所说，“但这意味着我们必须设想这些条件被赋予了一种可以产生出其中的频率等于概率的序列的趋势（tendency）

或趋向（disposition），或者说倾向；这正是倾向解释所断言的。”（Popper，1959b：35）在这个表述中存在着一个含糊的地方。波普尔并没有清楚表明，当谈到序列的时候，他所意谓的是无限序列还是很长但终究有限的序列。一个支持前一种解释的证据就是，波普尔说“频率”是“等于概率”的。极限频率在无限序列中会精确地等于概率，但频率在有限的长序列中只会**近似地**等于概率。然而，对于那个认为波普尔心目中所考虑的肯定就是无限序列的看法，也有两个不利的证据。

首先，就在同一篇文章中，他在较前面的部分阐述频率理论的时候，波普尔也是给出了一个明显是含糊的表述：

> 从频率解释的观点来看，一个**特定类型的事件**的概率——例如抛掷某颗骰子得出一个6点——可能只不过是这类事件在一个极长的（也许无限的）事件序列中的相对频率。
>
> （Popper，1959b：29）

其次，他在1957的一篇文章（Popper，1957b）中对于倾向理论的表述似乎是赞同有限序列的解释的。波普尔说：

> 因为那些概率最终被证明是依赖于实验设置的，所以它们可以被视为这种设置的特性。它们刻画了当实验**被频繁地重复**时实验设置所导致的某些特征频率的**趋向**，**或者说倾向**。
>
> （Popper，1957b：67）

可以肯定的是，频繁地重复进行的实验只能产生有限的序列。

我并不打算继续对波普尔的理论作进一步的诠释。我把这一点拿出来介绍主要是为了强调，此后在下文里我将采纳“**很长但有限的序列**”这种解释，并相应地认为这些条件有一种产生那些**近似地**等于概率的频率的倾向。这是因为我的目的在于使倾向理论更具科学性和经验性，而且显而易见的是，无限长的重复事例序列（sequence of repetitions）在经验世界中是找不到的。对这种解释的反对意见可能会认为，人们很难说一个重复事例序列何时才算是长，或者两个数字必须接近到什么程度才称得上近似地等于。这里其实存在着一个问题，我将在下一章详细地讨论它。

波普尔提议说，应该把概率与可重复条件集（set of repeatable conditions，S）的结果而非聚合（C）的结果联系起来。事实上，柯尔莫哥洛夫在其著作（Kol-

mogorov，1933）中早已作出了这样的提议。就在讨论他的理论与实验数据的关系的一节（Kolmogorov，1933：Chapter Ⅰ，§2），他在一个脚注中说到："在确立那些对于概率论对实际事件的领域的适用性是必要的前提的过程中，笔者已在很大程度上运用了 R. v. 米泽斯的工作成果。"（Kolmogorov，1933：3）然而，实际上，柯尔莫哥洛夫并没有仿效冯·米泽斯把概率与聚合联系起来，而是将它们与可重复条件联系起来，这正是以下引文所表明的：

> 假定存在一个条件的复合体 S，它有可能重复出现任何次……如果那些事件的某个变体基于条件 S 的实现实际上已经出现并且属于（以任何方式定义的）集合 A，那么我们就说事件 A 已经发生了……在某些情况下……我们可以假定，在条件 S 下可能出现或可能不出现的一个事件 A 被指派了一个实数 $P(A)$……
>
> （Kolmogorov，1933：3－4）

然而，柯尔莫哥洛夫并没有给出任何论证来支持他对冯·米泽斯的聚合概念的摒弃，这样的一个论证是由波普尔提供的。

不过，现在应该多加关注的是波普尔的倾向概念，而不是深究从聚合到条件的转变。"倾向"这个词暗示着某种类型的趋向描述，而这也标志着这种观点与频率观点的一个区别。考虑皮尔士（C. S. Peirce）早年遵循着同样思路的一些观点会是研究这个问题的一种有益的方式。[3]这些观点就包含在以下文段当中：

> 接下来，我打算阐明"如果一颗骰子从一个骰子盒中被抛掷出来，则它掷出一个能被三除尽的数字的概率是三分之一"这个陈述的意义。这个陈述意谓那颗骰子具有某种潜势（would-be）；说那颗骰子有一种潜势就是说它有一种特性，这种特性颇为类似于一个人可能具有的任何一种习惯。只不过骰子的潜势被假定为比人的习惯简单得多和更为明确，因为骰子的均质的组分和立方的形状要比人的神经系统和心灵简单；为了阐明人的习惯，有必要描述它是如何使人表现出某种行为的以及该行为是在什么样的场合下表现出来的——但这么说绝不意味着习惯取决于那种行为——正因为如此，为了阐明骰子的潜势，有必要表明在一个可以诱发出那种潜势的全部结果的场合下它是如何使骰子表现出某种行为的；而这么说并非自然地意味着骰子的潜势取决于这样的行为。
>
> （Peirce，1910：79－80）

然后皮尔士进而对“一个可以诱发出那种潜势的全部结果的场合”作出描述。这样的一种场合就是一个由骰子的各次抛掷构成的无限序列，骰子的有关行为则是：适当的相对频率围绕着数值1/3波动，逐渐地向这个值越逼越近，并最终在它之上收敛。而皮尔士一点也没有谈到“排除赌博系统”。

当然了，有一个地方皮尔士是弄错了的，那就是他把潜势说成是骰子的一种特性。很明显，它是取决于骰子被抛掷时所处的条件的，这一点可以由波普尔的以下两个有趣的例子来表明。首先假设有一枚偏向于“正面朝上”的硬币。如果我们在一个较弱的引力场中（比方说在月球上）抛掷它，则这种偏向非常可能会产生较小的作用，并且 *Prob*（正面朝上）会呈现出一个较低的值。这表明了概率和重量之间的一种相似性。我们通常不严谨地认为重量是物体的一种特性，而实际上，它是物体的一种与其所在引力场有关的特性。因此，一个物体的重量到了月球上就会是不一样的，但其质量（物体的一种真正的特性）还是相同的。我们可以用一枚普通的硬币来作为第二个例子，但这时候，我们不是让它落在一个平坦的平面上，比方说桌面上，而是让它落在一个凿有大量狭长窄孔的平面上。现在我们不再是只有“正面朝上”和“反面朝上”两个结果，而是有三个，即“正面朝上”、“反面朝上”与“边缘朝上”；第三个结果就是那枚硬币插在了其中一个狭长窄孔上。再者，由于“边缘朝上”有着一个有限概率，所以“正面朝上”的概率将会减小。这个例子表明了不仅诸结果的概率会随着抛掷方式的变化而变化，而且就连诸结果的确切性质也同样可以改变。

尽管有这个错误，但在我看来，在对作为某种趋向之量值的那颗骰子的那个概率——即某种潜势与某个可以诱发出这种潜势的全部结果的场合作出区分这方面，皮尔士提出了一个有价值的看法。这种区分的重要性在于，它允许我们把概率作为潜势来引入，甚至是在潜势的诸结果尚未得到全面显现，即我们实际上没有获得一个长重复事例序列这样的场合下也可以。另一方面，如果我们认为概率“取决于这样的行为”，那么只有在“诸结果得到全面显现的情况”下引入概率才是合理的，亦即只能为长重复事例序列引入概率。如果我们现在回过头来再看冯·米泽斯和波普尔，这一切会变得更加清楚。

冯·米泽斯的立场所导致的一个结果是，概率只应该在物理情境中被引入，在这些物理情境中，我们都有一个经验聚合，亦即其结果服从那两条为人所熟知的定律的一个长事件序列。然而，如果我们采纳波普尔的倾向理论，则在一个条件集上引入概率就变得完全合法了，**即使这些条件不是大数次地重复出现**。当有关条件仅仅重复出现一两次时，我们就被允许对概率作出推断（而且甚至还有可能获得这样一个推断的一些可检验的结果）。可见，与冯·米泽斯的频率观点相比，波普尔的倾向理论对概率论所适用的情况提供了一个有价值的扩展。但

是，波普尔的倾向理论是否同时也给关于引入单个事件的客观概率的问题提供了一个解决方案呢？我们将在下一节考虑这个问题。

第二节　单个事件能否拥有客观概率

艾耶尔（A. J. Ayer）（Ayer，1963：188－208）曾对引入单个事件的客观概率的方式可能存在的主要困难作过讨论，尽管这个问题在较早的历史阶段就已经出现了。这个困难是这样的。假设我们现在正尝试给一个特定的事件指派概率，那么，这个概率会根据该事件被认为是对其进行例示的那个条件集——实际上也就是根据我们对该事件的描述——作出改变。但这样会迫使我们把概率看做是与描述该事件的那些条件而非该事件本身相联系的。

为了说明这一点，让我们再来看看我们关于一个特定的40岁男人活到41岁的概率的例子。凭直觉可知，这个概率将视我们把这个人仅仅看做一个男人还是更为具体地看做一个英国男人而变化；因为英国男人的预期寿命是要高于人类整体的预期寿命的。类似地，这个概率将视我们把这个人看做一个40岁的英国男人还是看做一个每天抽两包烟或有诸如此类嗜好的40岁的英国男人而改变。这看来确实表明了概率应该被认为是取决于用以描述一个事件的那些特性而非取决于那个事件本身的。

在倾向理论的语境中，从用以描述一个特定的事件的条件方面来考虑这个问题是很自然的事情，但我们也同样可以把这个问题看成是关于给那个事件指派一个参照类的问题。如果不问：我们是否应该把他看做一个40岁的男人、一个40岁的英国男人或者一个每天抽两包烟的40岁的英国男人，我们也可以等值地问：我们是否应该给史密斯先生指派一个所有40岁的男人的参照类、一个所有40岁的英国男人的参照类或者一个所有每天抽两包烟的40岁的英国男人的参照类。这个问题首先是在频率理论中出现的，所以对参照类的阐述在频率理论的语境中会显得更为自然。尽管我们正在讨论倾向理论，但我们将继续使用传统的术语，把这个基本问题称为**参照类问题**（the reference class problem）。

豪森（C. Howson）和乌尔巴赫（P. Urbach）（Howson and Urbach，1989）对参照类问题的回应是认为单例概率（single-case probability）是主观的而非客观的。然而，他们也暗示，单称概率可能是以客观概率为基础的，尽管它们是主观的。例如，假设B先生所获得的关于A先生的有关信息是：A先生是一个40岁的英国男人。假设B先生对40岁的英国男人能活到41岁的客观概率有一个适当的估计（比方说p），这样，B先生就可以合理地将他对A先生能活到41岁的主观赌商看做是等于p的，从而使得他的主观概率是有客观基础的。然而，

这并不能把 B 先生的主观概率变为客观概率。因为请考虑 C 先生，他知道 A 先生每天抽两包烟，他也对每天抽两包烟的 40 岁的英国男人能活到 41 岁的客观概率（比方说 q）有一个适当的估计。C 先生会把他对同一事件（A 先生能活到 41 岁）的主观概率的值定为 q，这是有别于 B 先生的值 p 的。这又一次表明，概率是取决于如何对相关事件进行归类的，而不是取决于事件本身。豪森和乌尔巴赫提出了以下的看法：

> 单例概率……本身并不是客观的。虽然它们是主观概率，但是在一种情形中，关于一致性的各种考量会强制规定它们必须被设定为等于客观概率，那就是，恰好在你对那一单个事例所知的一切只是它是相关聚合的一个例示的时候。事实上，任何人都曾想要的从一个关于单例概率的理论得出的全部结果是：它们只有在那种情况下才会等于客观概率。那种关于客观的单例概率的条理不清的学说之所以会产生，只不过是因为人们过去未能留意到一个有客观基础的概率的那些数值与作为客观概率的那个概率本身之间的细微差别。
>
> （Howson and Urbach，1989：228）

我是偏向于接受豪森和乌尔巴赫的这段评论的，因而偏向于采纳以下的立场。我们肯定可以给作为某些可重复条件集 S 的结果的事件 A 引入客观概率。然而，当我们想要为一些单个事件引入概率的时候，这些概率几乎总是不能做到完全客观的，尽管它们有时候是有客观基础的。这是因为在大多数情况下，我们应该用来对事件进行归类的方式都会存在着不确定性，这就把主观因素引入到单称概率中去了。现在我将尝试详述这种立场，并对更多可以拿来支持客观单称概率的论据作出讨论。这些论据中的第一个［关于阿里和霍姆斯的例子（the Ali-Holmes example）］是由罗伯特·诺斯科特（Robert Northcott）提出的。

1980 年，38 岁的穆罕默德·阿里（Muhammad Ali）挑战拉里·霍姆斯（Larry Holmes），争夺世界重量级拳王桂冠。由于穆罕默德·阿里是一位广受欢迎的知名人物，所以大多数人都接受那些赞同他获胜的过高的赌商，结果使得押拉里·霍姆斯获胜的那些下赌注者赢了非常多的钱。难道这不是表明穆罕默德·阿里的胜出存在着一个比大多数人所认为的要低得多的客观概率吗？

我认为这个论据确实使某些东西得到了确认，但结论还是相当弱的，不足以断定客观单称概率的存在。它所表明的是，作为行动基础，某些主观概率（赌商）可能比其他概率更为可取，但某些较合适的主观概率的存在并不能使某一单个客观概率的存在得到确认。这个例子就是体现了一个一般性的原则，这个原

则可以粗略地陈述如下。总体而言，把基于较多证据而非较少证据的那一个主观概率（赌商）用做行动基础是比较好的做法。这样，在关于阿里和霍姆斯的例子中，关于年龄对拳击手的表现、对阿里和霍姆斯的相对的竞技状态等方面的影响，那些下赌注者所知道的要比一般民众多很多。因此，与由一个无知的民众所指派的相比，由一个下赌注者所指派的阿里获胜的主观概率在当时可能会是一个比较好的行动基础。

接下来让我们来看看关于这个一般性原则的一个特定的例子。假设一个特定的事件 E 可以被归类为一系列条件 S，S'，S''，…的一个例示，在这一系列条件中，条件集 S 是 S'的一个子集，而 S'又是 S''的一个子集，依此类推。再进一步假设统计数据使我们能够对相应于 S，S'，S''，…的情况下 E 出现的客观概率有适当的估计，比方说 p，p'，p''，…。这样一来，当考虑 E 的出现时，常识会建议我们，可以比较好地被接纳为我们的概率是 p'而非 p，是 p''而非 p'，依此类推。如果我们所考虑的是 S 的例示集（set of instances）的参照类而不是条件 S，那么此处的这个原则可以叫做**最小参照类原则**(principle of the narrowest reference class)。这被艾耶尔视为"合理接受"（rational to accept)。他对此陈述如下：

> 这条规则是，为了估计一个特定的个体具有某种给定的特性的概率，我们要从该个体所属的那些类当中，选择这种特性以一个可凭已有资料推断出的频率出现于其中的最小的类作为我们的参照类。
>
> （Ayer，1963：202）

我们可以再次通过我们关于一个特定的 40 的男人能活到 41 岁的概率的例子来说明这一点。这个人可以被归入以下参照类中：40 岁的男人的类、40 岁的英国男人的类、每天抽两包烟的 40 岁的英国男人的类。现在假设对于这三个类我们都有适当的统计数据，那么最小参照类原则会建议我们应该以这三个参照类的第三个中的频率作为我们关于这个特定的人能活到 41 岁的概率的基础。

看来最小参照类原则无疑是一个可靠的原则，但是它也有一些问题。首先，对于可以获得的统计资料，可能并不存在单独一个最小参照类。[④]假设史密斯先生除了每天抽两包烟外，每周还踢一次足球。让我们假设，对于每天抽两包烟的 40 岁的英国男人的类和每周踢一次足球的 40 岁的英国男人的类，我们都有关于它们之中的成员在一年内死亡的统计数据，但就是**没有**每天抽两包烟并且每周踢一次足球的 40 岁的英国男人的类的有关统计数据。这样，对于可以获得的统计数据，我们就有两个而非一个最小参照类，而且根据这两个类对史密斯先生能活到 41 岁的概率所作的频率估计（比方说 p''，p'''）也极有可能是不一样的。

即便存在单独一个最小参照类，但正如凯恩斯所指出的，如果对它不加批判地使用，也可能是有危害的。假设我们采取这种策略，把某一单个事件所属的、存在着适当的统计数据的最小参照类中的频数比作为我们关于那个事件的概率。在凯恩斯看来，这样一种策略极有可能将我们引入歧途，因为关于那个事件我们可能知道一些并不被视作参照类中的统计数据的组成部分的事情，但它们却给出了一些非常合适的理由，让我们得以调整我们的概率。如果我们忽略了这样一些定性的证据而仅仅使用定量的证据，也许我们常常会得出一个概率，它与我们本来可能通过其他方式所获得的行动基础相比，是不那么令人满意的。凯恩斯提出了如下的看法：

> 伯努利的第二条格言——即在估算一个概率时我们必须把所有信息都考虑在内——在关于统计概率的这些情况下很容易被遗忘。统计结果在其明确性方面是如此地诱人，以至于它使我们遗忘了较为重要但也较为含糊的须考虑的因素，这些因素在某种特别的情况下可能就包含在我们的知识中。对于一个陌生人而言，我会邮寄一封没有贴上邮票的信的概率可能来自于邮政局的统计资料；对于我来说，那些数字会对这个问题有影响，但却是最轻微的影响。
>
> （Keynes，1921：322）

凯恩斯显然是考虑到了他邮寄一封没有贴上邮票的信的可能性要么是远高于平均水平（也许是由于心不在焉或者无意识的贪婪）要么是远低于平均水平（由于他在生活习惯方面十分注重细节）。他只不过没有把话说出来而已。

下面我们可以用我们熟悉的例子来阐明凯恩斯的看法。我们正试图确定我们特定的一个人——史密斯先生将活到 41 岁的概率。让我们假设，史密斯先生毕竟没有每周踢一次足球，而且存在着一个对于它我们有适当的统计资料的最小参照类，即每天抽两包烟的 40 岁的英国男人的类。于是我们相应地把他能活到 41 岁的概率估计为在这个类中已经活到了 41 岁的那些人的频率，比方说 r。然而，假设我们得知史密斯先生来自于一个非常庞大的家族，其所有成员都是每天抽两包烟，但却没有一个人患了肺癌或其他任何与吸烟有关的疾病，甚至没有一个人是在 80 岁前去世的。虽然我们现在没有关于属于这样一些异乎寻常的家族的人的统计数据可用，但毋庸置疑的是，依据这些额外的信息，把我们的概率改变为一个比 r 要稍微高的值将会是合理的。

这样一来，给单个事件指派概率的一般步骤大致如下。首先，我们给那个事件指定一个存在着可靠统计数据的最小参照类（如果有这样一个类的话），并计

算出该事件出现在这个类中的相对频率（比方说 r）。接着，我们来考虑任何有关于该事件在这个特定的场合出现的、具有非统计特征的附加信息，并根据这些信息把 r 调高或调低以获得我们的概率。如果碰巧存在着若干个最小参照类，它们的频率分别是——比方说——r，r'，r''，…，那么我们必须使用那些非统计性信息去选择一个特定的 r 值并对它作出调整。如果根本就没有合适的参照类，我们就不得不全然依赖于那些非统计性信息去选定一个主观概率。这样一个步骤想必是合理的和切合实际的，但它也涉及很多主观因素，因而在大多数场合下不大可能提供一个客观单称概率。现在我将再给出另外一个关于这个步骤的例子——**弗兰西斯卡论点**（the Francesca argument）。

我的妻子来自罗马，她的姐姐有一个女儿叫弗兰西斯卡。为了说明弗兰西斯卡是如何着手表述这个论点的，有必要对关于罗马的社会风俗的一些背景情况作出介绍。在罗马，当一名学童到了 16 岁的时候，为了情绪性幸福感的需要和维持在同辈群体中的地位，似乎变得有必要拥有一辆低座小摩托车。不过，这自然会引起父母（甚至叔伯们）的极大担忧，他们很在意发生交通事故的可能性。当弗兰西斯卡 16 岁时，她也未能免俗，也想要这样做。因此，我跟她在这个话题上曾有过辩论。我指出骑低座小摩托车的 16 岁的罗马人出车祸的频率是相当高的，因此还是不买小型摩托车比较好。在弗兰西斯卡的答复中，她认可统计资料的真实性，甚至还补充说，她早就有两名校友由于低座小摩托车的事故导致昏迷而被送进医院，其中一个女孩没有戴防撞头盔就骑上她的小型摩托车去买比萨饼。她是在回程的途中发生事故的，当时她一只手里平拿着比萨饼，另一只手驾驶着小型摩托车。然而，弗兰西斯卡评论说，这个女孩笨极了，她（弗兰西斯卡）就从未做过这样的事情。她自己会小心谨慎地好好驾驶她的小型摩托车，会戴一个防撞头盔，还会采取其他一切被推荐的预防措施，因此她发生事故的概率是要比平均水平低得多的。尽管我当时正尽力支持相反的结论，但在我看来，弗兰西斯卡的这个论点是无可挑剔的。事实上，它就是凯恩斯的一般性原则的一个具体例子。对于很了解她的人而言，看来的确很有可能的是，她会小心谨慎地好好开车，因而她与普通的 16 岁的罗马人相比不大有可能发生事故。唯一可能提出的批评意见是，事故有时候是由对方的过失造成的，就算你驾驶得再好、再小心翼翼，对于对方的错误也是防不胜防的。可见，一个极为优秀和最为谨慎的驾驶者发生事故的概率不会降到平均水平以下太多。[5]

现在我将考虑最后一个有利于认为有适合于单个事件的客观概率的论据。[6]有一点可以承认的是，在某些场合中，要确定像“一个人死于 41 岁之前”或“一个 16 岁的罗马人在骑低座小摩托车时发生事故”这样的一些客观单称概率是很难的。不过，仍然可以断言的是，这类单称概率在像机会游戏或科学实验

（例如量子力学的电子双缝实验）这样的场合中还是比较似真的。让我们首先将机会游戏作为例证。毫无疑问，在诸如抛硬币或掷骰子这样的例子中，说每一次抛掷都存在着一个等于抛掷序列中的客观概率的客观单称概率看来确实是相当合理的。我们之前的讨论表明了为什么客观单称概率在这里比在包括有人死于41岁之前或发生交通事故在内的关于人的场合中要更为似真。在关于人的场合中，有许多关于那个正被考虑的人的事实并不表现为与长序列相关的统计数据的形式，但它们看起来是有关于概率的评估的。也许它们有强烈的迹象表明，所讨论的那个人具有某种特征以至于使他或她比一般的驾驶者更为谨慎等等。然而，在抛掷硬币的标准场合中，如果排除欺诈和渎职，这其实是我们的背景知识的一部分，即那些关于抛掷的额外的事实不会对结果造成影响。这样的话，那枚硬币在被抛掷前是正面朝上还是反面朝上或者让它落在桌面上还是地板上等等都是无关紧要的。因此，我们的背景知识会建议我们应该使每次抛掷的单称概率都相等，从而等于整个序列的客观概率。可见，我们是可以在这个特殊的场合中引入客观单称概率的，但这样做似乎没有什么意义，还不如接受豪森和乌尔巴赫的分析，将之视为一个基于客观概率的主观概率。毕竟，只要我们想要就某个结果进行打赌，我们通常感兴趣的是一次特定的抛掷（而非一个抛掷序列），因此根据赌商所作的主观概率分析看来是颇为适当的。

现在让我们来考虑科学实验。依我看，在这个场合中引入客观单称概率不如在机会游戏的场合中有说服力，其原因如下。正如刚才所看到的，抛硬币和掷骰子的特点在于，它们能以不同的方式进行而不影响得到一个特定的结果的概率。要以一种有利于某一面而非另一面的方式抛掷一枚硬币，即使并非不可能的话，做起来其实也是很困难的。[7]然而，科学实验方面的情况是相当不一样的。想做到准确地进行实验而实验结果又不受无关因素的干扰往往是非常困难的。需要十分熟练和谨慎才能确保外界的影响不会产生什么后果。例如，请考虑量子力学的电子双缝实验。假设有两位科学家A先生和B女士正在就某个电子将会在实验的一次特定的重复中落在什么位置上进行打赌。A先生设定他的概率等于根据标准理论计算出来的概率。然而，B女士已经注意到了附近有过一场雷暴，她从经验得知由此所导致的大气层中的电扰动常常会对这类实验产生影响。因此，她根据这一因素调整了她的概率。这又一次表明，似乎比较好的做法就是，把实验的一次特定的重复实施中的单称概率分析为主观概率，而不要分析为这样的客观概率，即它们精确地等于由实验的各次重复实施所构成的一个序列中的客观概率。

我从这节的讨论中所得出的总体的结论如下。给作为可重复条件集S的结果的事件A指派客观概率在某些场合中是合理的。假设$Prob(A \mid S) = p$。波普尔断言，在条件S的一次特定的例示中，A的出现有一个客观单称概率。然而，我们

已经论证表明，这样的一个断言要得到辩护的话，也只能是在像抛硬币或掷骰子那样的简单的机会游戏的场合中得到辩护。在其他所有场合中，或许就算在机会游戏的场合中，把单称概率分析为主观概率是更为合理的，但正如豪森和乌尔巴赫所强调的，它们可能至少在一定程度上是以客观概率为基础的。正如我们所见，波普尔的倾向理论是为了允许客观单称概率的引入而得以发展的。我已经论证表明它在这方面做得并不成功，所以这看来似乎我已由此拒斥了倾向理论。毋庸置疑的是，如果倾向理论是在严格的意义上被用于描述波普尔的确切的观点的话，那么我确实是拒斥这种理论的。[8]然而，自从波普尔引入“倾向理论”这个术语以来，它已逐渐获得了一种较为宽泛的含义，大致意谓“一种客观的但非频率的理论”。在下一节我将检视“倾向”这个比较广义的术语，并表明它是如何导致对于倾向理论的一种分类的。这章的剩余部分将会考虑这些关于倾向的各种不同的思路的利与弊。

第三节　倾向理论的分类

一个概率的频率理论可以被刻画为这样的理论，在这个理论里，概率是依据频率来被定义的，要么是在数学形式体系中得到定义，要么是在专为使理论与经验相符合而构想的非形式的补充说明中得到定义。这表明频率理论是以一种操作主义的科学哲学为基础的。我把操作主义看做是认为一门科学的理论术语应该依据可观察物来定义的观点。概率的频率理论体现了操作主义的研究进路，因为“概率”这个理论术语是依据可观察的频率来定义的。

操作主义在20世纪20年代非常盛行，但随后一直受到科学哲学家们的大量批评。已经开始流行开来的替代观点是，一门自然科学的理论术语可能在许多情况下是作为未加定义的初始词项来被引入的，然后以一种颇为间接的方式——即不是直接通过操作定义——与经验相联系。如果这种比较近期的观点被运用于概率论的话，它会与基于柯尔莫哥洛夫公理的现代数学对概率的处理方式配合得十分好。在冯·米泽斯对概率的数学处理中，概率在数学形式体系里被显式地定义为极限频率。柯尔莫哥洛夫摒弃了这种思路，并在他的数学的阐发中把概率看做一个初始的、未加定义的、得到公理化刻画的术语。应该承认，如果我们认为概率是在专为使理论与经验相联系而构想的非形式的补充说明中依据频率而得以定义的，则柯尔莫哥洛夫的思路还是与频率理论相容的。事实上，柯尔莫哥洛夫（参见 Kolmogorov，1933：3－5）本人所采纳的看来就是一个具有这种共性的理论。尽管柯尔莫哥洛夫的数学在这种意义上是与概率的频率理论相容的，但是它似乎与新近的非操作主义的科学哲学符合得更为自然，在这种科学哲学中，关键

的理论概念常常会被视为未加定义的，因而只是颇为间接地与观察联系起来。

这些考量表明了有必要发展一种客观的但非频率的概率理论，但顺便要说明的是，它们与是否存在着单个事件的客观概率这个问题是没有关系的。这样的一种理论在以下方面是会认同冯·米泽斯的观点的，即概率论是一门与可观察的随机现象相联系的数理科学。它在以下方面也是会认同冯·米泽斯的观点的，即概率是一个客观概念，好比理论力学中的质量或电磁理论中的电荷。不过，它在以下方面是不同于冯·米泽斯的观点的，即概率应该被给予一个以频率为依据的操作定义。概率最好还是作为一个初始的、未加定义的、被一组公理[9]所刻画的术语被引入，然后再通过某种比以频率为依据的定义更间接的方式与观察相联系。我的建议是，我们应该使用波普尔的术语"倾向理论"去描述任何具有刚才所说的共性的、客观的但非频率的概率理论。

倾向理论在上述的一般意义上现在可以被归类为**长程倾向理论**（long-run propensity theory）和**单例倾向理论**（single-case propensity theory）。[10]长程倾向理论是这样一种理论，在其中，倾向是与可重复的条件相联系的，它们被看做是可以在这些条件的复现的长系列中产生近似地等于概率的频率的倾向。单例倾向理论则是这样一种理论，在其中，倾向被看做是可以在一个特定的场合中产生某种结果的倾向。正如我们所看到的，波普尔最初的倾向理论在某种意义上**既**属于长程的**也**属于单例的。他对倾向的刻画相应于我们的长程倾向，但是他想让这些倾向也同样适用于单个事例。这种立场遇到了与参照类问题相关的困难，因而波普尔这两部分的说明一直以来都存在着分离开来产生两种不同类型的倾向理论的趋势。我本人偏爱长程倾向理论，更为喜欢用主观概率来处理单个事例，尽管它们是主观的不过也可能是有客观基础的。但接下来我们将更为仔细地检视坚持单例倾向和以别的方式修正波普尔最初的看法的其他可能性。

这个分析说明了伦德（Runde，1996）所指出的事实，即波普尔后期对于倾向的观点——尤其是波普尔在其1990年出版的著作（Popper，1990）中所持的观点——与他前期的观点有着相当大的差异。这种较新近的立场也得到了米勒（Miller，1994，1996）的发展。它保留了源于波普尔早期的客观单称概率，但摒弃了倾向与可重复条件的联系。倾向转而与宇宙的状态联系起来。费策尔（Fetzer，1981）在此之前发展过一个单例倾向理论，但它与后期的波普尔和米勒的观点有重大的差别。他不是把倾向与世界在一个给定的时刻的全部状态联系起来，而是把它们与（律则地和/或因果地）相关的条件的一个全集联系起来，这些条件无论是否曾经重现过，都是易于重现的。在下一节我会给这些单例倾向理论提供一个较为全面的说明，同时也会从本书主张的长程倾向理论的视角对它们作出评论。

第四节 米勒、后期的波普尔及费策尔的倾向理论

波普尔早期与后期对于倾向的主要差异之处在于，波普尔早期把倾向与可重复条件联系起来，而波普尔后期则说："物理学中的倾向是**整个物理情境**的特性，有时还是一种情境借以转变的特定方式的特性。"（Popper，1990：17）。波普尔作出这种转变的一个原因可能是他一直希望为单个事件保留客观概率。如果倾向是与可重复条件相联系的，那么，正如我们先前（本章第二节）所详细论证的，要将它们归因于这些条件的特定的例示是很困难的。不管怎样，米勒是决意要保存客观单称概率的。他写道："在倾向解释的任何一个变体中都存在的最重要的优点被认为是：与频率理论不同，它不但使得系综中的概率和长系列中的概率易于被理解，还使得单例概率易于被理解。"（Miller，1994：175）他还写道："倾向解释……是一种客观主义的解释，在这种解释中单例概率是最重要的。"（Miller，1994：177）我自然是不同意这种观点的，因为我想要发展倾向理论的一个版本，客观的单例概率在这个版本中是被摒弃掉的。

在他较早的阶段，波普尔在一段已经被我们引述过的文字中写道："但这意味着我们必须设想这些条件被赋予了一种可以产生出其中的频率等于概率的序列的趋势或趋向，或者说倾向；这正是倾向解释所断言的。"（Popper，1959b：35）正如我早已说明的，我会把这里的"等于"替换为"近似地等于"，但除此以外，我是把这段文字接纳为我自己版本的倾向理论的一部分的。然而，米勒批评了这种认为倾向就是产生频率的倾向的看法。与此相反，他把它们视为实现特定结果的倾向。正如他所说："在倾向解释中，一个结果的概率不是对任何频率的测度，而是（正如将会被说明的）对当前事态偏向于实现那个结果的态势的测度。"（Miller，1994：182）在一个重要的文段中，米勒把他对于波普尔早期的立场的这些转变与解决关于单称概率的问题的需要联系了起来。他是这样说的：

> 因此，令人遗憾的是，……我们（在早期的波普尔那儿——引者注）找到了这样一些话，它们……把倾向描述为"在相似的条件或情形的重复出现中产生相对频率的趋势"……倾向既不在物理事物中，也不在局部状况中。严格说来，每种倾向（绝对的或有条件的）都必须被归因于当时宇宙（或光锥）的全部状况。倾向取决于时下的状况，而非其他状况，无论它们多么相似。只有以这种方式我们才能获得解决关于单个事例的问题所要

求的专一性。

（Miller，1994：185－186）

我对倾向理论的这个版本的叙述到此结束，现在我将着手对它作出评论。

波普尔和米勒关于倾向的这两种20世纪90年代的观点的主要问题在于，他们似乎把倾向理论从一种科学理论变为一种形而上学理论。如果倾向被归因于一个可重复条件集，那么，通过重现那些条件，我们就可以获得那些能够用以检验对倾向的赋值的频率。另一方面，如果倾向被归因于“当时宇宙……的全部状况”，那么，考虑到这种状况的独特性和不可重复性，我们是难以设想这样一些对倾向的赋值是怎样得以检验的。米勒似乎是同意这个结论的，因为他写道：“概率的倾向解释不可避免地是形而上学的，不仅仅是由于许多倾向被假定为不可能接受经验的评价。”（Miller，1996：139）波普尔也以类似的风格写道：

但在很多类事件中……倾向之所以不能被测度，是由于相关的情境会发生改变而且不能被复现。例如说，对于我们某些进化上的祖先的那些催生出黑猩猩和我们人类的不同倾向，这也是成立的。这种类型的倾向当然是不可测度的，因为那个情境不能被复现。它是独一无二的。尽管如此，但也没有什么东西可以妨碍我们假设这样的一些倾向存在和对它们作出猜测性的估计。

（Popper，1990：17）

当然了，我们其实是可以对倾向作出猜测性的估计的，但如果这些猜测是不能用数据来检验的，则它们本质上就是形而上学的。

发展一种形而上学的倾向理论是没有什么问题的，而且这样的一种理论还可能是与古老的形而上学问题（例如关于决定论的问题）的探讨有关的。然而，我自己的目标是要发展出一种可以用来给出现在诸如物理学和生物学那样的自然科学中的概率提供解释的关于概率的倾向理论。对于一个属于这种类型的理论，对概率的赋值应该是可以通过经验数据来检验的，为此，值得期许的是，它们应该与可重复条件相联系。

费策尔的单例倾向理论与米勒和后期的波普尔的倾向理论的区别在于，他并不是把倾向与宇宙的全部状态联系起来。他是这样说的：

……不应该认为那些导致诸结果出现的倾向……总体上是取决于世界在某一时刻的全部状态而不是取决于（律则地和/或因果地）相关的条件的一

个全集……这个全集恰巧在那个时刻在那个世界中被例示。

（Fetzer，1982：195）

在我看来，相较于米勒和后期的波普尔，这是朝正确方向所迈出的一步，但是，对于这样一些倾向是何以做到能被科学地检验的，我心中仍然存有一些疑虑。如果就像从长程倾向的角度来看的那样，倾向是与一个可重复条件集相关联的，那么在原则上总是有可能通过重现那些条件来检验一个由猜想所得的倾向值的。如果正如费策尔所间接表明的，我们把倾向归因于（律则地和/或因果地）相关的条件的一个全集，那么，为了检验一个由猜想所得的倾向值，我们必须对全部相关条件作一个猜想。这个必要的猜想可能往往是不易表述和难以检验的，由此使得相应的倾向成为形而上学的而非科学的。于是，这使我再一次怀疑单例倾向是否能给那些出现在各门自然科学中的客观概率提供一个适当的分析。

另一方面，出于对费策尔的观点的偏爱，应该说，如果关于找寻相关条件的一个全集的问题可以得到解决的话，他的理论所提供的就是一种简捷和统一的说明。如果我们能够界定相对于某个相关条件全集（比方说 S_C）的单例倾向，我们就能进而把这推广到由 S_C 的复现所生成的长程序列（无论是有限的还是无限的）。我个人的看法是把倾向与可能并不完全的条件集 S 的长程复现联系起来。虽然这使得对倾向的赋值是易于检验的，但是，出于前面（本章第二节）已经说明过的原因，这也意味着它们在总体上是不能被推广到单个事例的，在那种场合需要的是主观概率。因此，如果能使费策尔的理论产生预期效果的话，那就可以得到一种统一的一元论的说明，而可供选择的长程倾向的思路必然会导致一种较为复杂的二元论。

单例倾向理论可以被进一步细分为**宇宙状态**（state of the universe）版本和**相关条件**（relevant conditions）版本，在前一种版本中倾向取决于宇宙在一个给定的时刻的全部状态，而在后一种版本中倾向取决于相关条件的一个全集。米勒和后期的波普尔选择前者，而费策尔则选择后者。在此基础上，我们现在可以扩展我们对倾向理论的分类。那就是，如果我们再加上本书所主张的长程倾向理论的话，我们就有三种不同的倾向理论了。在下一节，我将看看这三种理论是如何处理另一个与倾向有关的重大问题的，以此对它们进行充分的检验。这是一个关于把倾向与因果性联系起来的问题，这一问题导致了所谓的汉弗莱斯悖论（Humphreys' paradox）。

第五节　倾向与因果性：汉弗莱斯悖论

在其1990年出版的《一个由倾向构成的世界》（*A World of Propensities*）一书中，波普尔提出了一个有意思的建议，认为可以把倾向作为原因（cause）这个概念的一种广义表述。波普尔是这样说的："因果关系只是倾向的一个特例：倾向等于1的那种情形。"（Popper，1990：20）对此，让我们举一个简单的例子来作出说明。例如说，大剂量的氰化物肯定是会导致死亡的。适当的小剂量的氰化物可能仅仅会产生一个程度为0.6的致死的倾向。因此，倾向似乎是因果性的一种弱化形式。这种认为倾向是对原因的广义表述的观点存在着如下的一个根本难题。原因在时间上是有一个明确的方向的。因此，如果A因致（cause）B并且A先于B发生，那么B并不因致A。除了理论物理学中的一些猜测以外，得到普遍承认的是，原因在时间上不会向后产生影响。至于概率，情况是大不一样的。对于事件A，B，我们通常都有：如果$P(A|B)$得以定义，则$P(B|A)$亦然。在原因不具有对称性的场合，概率有一种对称性。可见，看来倾向归根结底是不能作为原因的一种广义表述的。

这个问题是被汉弗莱斯（P. W. Humphreys）最先注意到而由萨尔蒙（W. C. Salmon）首先公之于众的，萨尔蒙对此给出了值得引述的令人难忘的阐述：

> 正如保罗·W. 汉弗莱斯在一次私人通信中所指出的，把倾向与概率等同起来是存在着一个重要限定的，因为我们似乎做不到让倾向与"逆向"（inverse）概率相匹配。给定合适的"正向"（direct）概率，我们可以——比如说——使用贝叶斯定理去计算一个特定的致死原因的概率。假设我们被给予一组概率，我们可以从它们演绎出某个人被枪击头部致死的概率是3/4。在这些情况下，说这具尸体有一种让一颗子弹射穿其颅骨的3/4的倾向（趋势?）会是不可思议的。我认为，倾向在一个概率主义的因果理论的语境中可以成为有用的因果概念，但是，如果它是以那种方式被使用的话，它似乎承袭了因果关系在时间上的不对称性。
>
> （Salmon，1979：213－214）

这个问题被费策尔（Fetzer，1981）命名为"汉弗莱斯悖论"，它已经引发了很多有趣的讨论。汉弗莱斯（Humphreys，1985）本人曾给出一个对于这个悖论的说明，麦柯迪（C. S. I. McCurdy）（McCurdy，1996）对它有过批判性的讨论。费

策尔和米勒对此也作出过重要贡献，稍后我将有所讨论。然而，我的目的并不在于给有关该主题的文献提供一个全面的评述，而是在于实行以下这个意图比较明确的策略。一开始我会给出在我看来是最为简单的两个关于该悖论的例证。接下来我将检视前面介绍过的那三种倾向理论是如何能够处理这些情况的。

第一个例证来自于米尔恩（P. Milne）（Milne，1986）。让我们对抛掷一颗标准的骰子作出考虑，令 A = 6 点并且 B = 偶数点。这样，根据标准的概率论，$P(B\mid A)=1$，并且 $P(A\mid B)=1/3$。$P(B\mid A)$ 不会引起什么问题。如果那颗骰子的一次特定的抛掷的结果是 6 点，那么那个结果必定为偶数点。B 完全是由 A 决定的，这可以令人满意地被视为相当于一种程度为 1 的倾向。但是现在米尔恩提出了一个问题，即如何用单例倾向理论去解释 $P(A\mid B)$。这里确实存在着一个问题，因为对此我们不能解释说，结果 B 的发生以 1/3 的权重部分地因致了结果 A 的出现。事实上，如果结果 B 已经发生了，那么实际的结果必定是 2 点、4 点或 6 点。前两种情况已经决定了 6 点在那次抛掷中是不会出现的，而第三种情况则决定了 6 点是肯定会出现的。在这几种情况中都不能合情合理地说 A 在 1/3 的程度上被 B 的发生所部分地决定。

米尔恩的例子是关于两个同时发生的事件 A 和 B 的。不过，最典型的是，原因先于其结果出现。因此，我们需要在 A 与 B 不同时发生的情况下对 $P(A\mid B)$ 作出考虑。这类事例比米尔恩的简单的掷骰子的例子要稍微复杂一些。我已经选择了一个在我看来是最简单和最巧妙的事例。这是一个有关飞盘的例子（Earman and Salmon，1992：70）。它与萨尔蒙（Salmon，1979：214）以前给出的一个涉及电灯泡的例子在本质上是一样的。

接下来让我们假设有两台生产飞盘的机器。机器 1 每天生产 800 个，有 1% 的产品是次品。机器 2 是一台较为老旧和效率比较低下的机器，每天生产 200 个，有 2% 的产品是次品。让我们假设，在每天生产结束的时候，有一个飞盘会被随机地从这两台机器的 1000 个产品中挑选出来。令 D = 所选的飞盘是次品。令 M = 它是由机器 1 生产的，N = 它是由机器 2 生产的。让我们考虑两个条件概率 $P(D\mid M)$ 和 $P(M\mid D)$。$P(D\mid M)=0.01$，而 $P(M\mid D)$ 是可以用贝叶斯定理计算出来的，其计算步骤如下：

$$\begin{aligned}P(M\mid D) &= \frac{P(D\mid M)P(M)}{P(D\mid M)P(M)+P(D\mid N)P(N)}\\ &= \frac{0.01\times 0.8}{0.01\times 0.8+0.02\times 0.2}\\ &= \frac{8}{12}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

就概率演算的标准运算而言，这两个条件概率是不存在什么问题的。但是，如果D，M与N涉及的是特定的一天，那么，从单例倾向的角度，它们是如何得到解释的呢？

至于$P(D|M)$，那当然是没有问题的。这正是机器1生产出一个有缺陷的飞盘的倾向。但$P(M|D)$的情况又怎么样呢？这是某天生产结束时实际所抽到的那个有缺陷的飞盘是由机器1生产出来的倾向。如果我们把倾向看做部分原因，情况会变为：当晚所抽到的一个飞盘是有缺陷的是它在当天较早时由机器1生产出来的一个权重为2/3的部分原因。这样一个概念看来是无意义的语词，因为等到那个飞盘被选中的时候，它要么肯定是已经被机器1生产出来的了，要么肯定不是由那台机器生产出来的。通过假设机器1生产蓝色的飞盘，机器2生产红色的飞盘，我们可以使所谈论的事情更为明晰。如果那天生产结束时所抽到的有缺陷的飞盘是蓝色的，那它肯定是由机器1生产出来的，因而说它有一种是由机器1生产出来的2/3的倾向是不易让人明白这样说有什么意义的。显然，这种类型的例子给关于概率的倾向观点提出了一个难题。下面就让我们来检视一下目前所讨论的这三种倾向理论是怎样应对这个困难的。

我将以长程倾向理论作为讨论的开始。倾向在此是与可重复条件集联系起来的。令S为这样的一个条件集合：令S的具体结果为一个类Ω的元素。这样，倾向就被指派给了被看做是Ω的子集的事件A，B，…。因此，例如说，$P(A|S)=p$就意味着：如果S大数次地复现，则A有一种以一个近似地等于p的相对频率出现的倾向。S的每一次复现都是单独的事例，这种关于倾向的观点是无论如何也处理不了这些事例的。它们要用主观概率来处理。

从前面对长程倾向理论的粗略概述中可以明显地看出，基本倾向是具有条件性的，于是我们有$P(A|S)$这样形式的基本倾向，其中S是一个可重复条件集。请注意，我们在此处是不可以颠倒这个顺序的，因为$P(S|A)$是没有意义的。我们往往为了简略，所以没有明确提及S而把$P(A|S)$缩写为$P(A)$。像$P(A)$这样的概率常常被叫做**绝对概率**(absolute probability)，但是由于事实上$P(A)$是$P(A|S)$的缩写，因而把它们称为**基本条件概率**(fundamental conditional probability)或**基本意义上的条件概率**(conditional probability in the fundamental sense)可能会更为准确。这类基本条件概率可以与$P(A|B)$这样形式的条件概率形成对照，在$P(A|B)$中B并不是一个可重复条件集而是一个事件。可以被逆转过来产生$P(B|A)$的正是这些条件概率。让我们把这样一些条件概率叫做**以事件为条件的概率**(event-conditional probability)。这引起了两个问题。在给定的解释中，这样的一些条件概率表示什么意思？还有，它们是怎样与基本条件概率相联系的呢？我现在将尝试回答这些问题。

我的建议是，正如P(A) 应该被视为P(A｜S) 的缩写，因此，P(A｜B) 也应该被视为P（A｜B & S）的缩写，其中B & S代表一个被定义如下的、新的可重复条件集。我们就像往常那样使S反复出现，但只留意作为B的元素的那些结果。不存在于B中的结果是被完全忽略的。说P(A｜B & S）=q就意味着：如果这个新条件集B & S大数次地复现，则A有一种以近似地等于q的频率出现的倾向。我紧接下来的断言就是，借助这种对于以事件为条件的概率的解释，所有出现在米尔恩的例子和关于飞盘的例子中的条件概率都有了恰当的意义而不致于引起任何问题。

让我们首先来看看米尔恩的例子，在这个例子里，问题在于如何解释P(A｜B)=1/3，其中A=那颗骰子某一次的抛掷结果是6点，B=那颗骰子某一次的抛掷结果是偶数点。根据我们的长程倾向的观点，这个概率的意义如下。假设我们大数次地抛掷那颗骰子，但忽略所有奇数点的结果。在这种情况下，6点有一种以一个近似地等于1/3的频率出现的倾向。这既符合事实，又简单明了。请注意，米尔恩的难题消失了，因为我们现在考虑的是那颗骰子的长时间连续抛掷，而不是它的单独一次抛掷。

根据这种长程倾向解释，与米尔恩的例子相比，那个关于飞盘的例子同样是不难处理的。令S为这样一个可重复条件集，它明确规定了那两台生产飞盘的机器各自的日产量，以及在晚上这些飞盘中有一个会被随机抽检，看看是否有缺陷。显然，S是每天都能被复现的。P(M｜D) 现在被解释为P(M｜D & S）的缩写。陈述“P(M｜D & S）=2/3”的意思如下。假设我们每天都让S重复出现，但只留意所选到的飞盘为次品的那些日子，那么，相对应于这些条件，如果它们被大数次地例示，就会存在着一种倾向，即M将会以近似地等于2/3的频率发生，也就是说，那个飞盘将以近似地等于2/3的频率由机器1生产出来。请注意，这些难题再一次消失了，因为我们现在考虑的是长期的情况而非个别的事例。在一次具体的例示中，说那个被选中的飞盘是由机器1生产出来的倾向等于2/3是不合情理的。如果那个被选中的飞盘是蓝色的，那它就是由机器1生产出来的。如果是红色的，则是由机器2生产出来的。在这两种场合的任何一种中，所出现的情况都是早已被决定的，因此一个2/3的倾向是不合情理的。如果倾向是产生长程频率的倾向，那么一个2/3的倾向就是很合情合理的，即使我们知道在每一个单独的事例中等到所选的飞盘被检出是次品时结果就已经被明确地决定为要么M要么D了。

到目前为止，我尚未谈到因果性与倾向之间的联系，而长程倾向理论似乎切断了这种联系。但这样做有错吗？毕竟，在关于因果性的讨论中，标准的做法就是把原因与相关（correlation）区别开来。我的气压计的读数急剧下降与快要下

雨是密切相关的，但没有人会假定我的气压计的读数急剧下降是下雨的原因。“相关”现在是一个概率性的概念。因此，实际上正确的看法可能是，原因是不同于概率的。根据长程倾向解释，鉴于我的气压计的读数急剧下降，所以快要下雨存在着一个程度很高的倾向，但这种倾向在性质上并不是因果性的。我在长程倾向理论的语境下对于汉弗莱斯悖论的讨论到这里就结束了。接下来我将细察该悖论在那两个单例倾向理论的框架内是如何可能得到解决的。

让我们首先讨论为米勒和后期的波普尔所发展的宇宙状态版本的单例倾向理论。在这种进路中，一个特定的事件 A 的概率被认为是以宇宙较早前的一种状态——比方说 U_t——为条件的。“$P(A \mid U_t) = p$”的意思是，宇宙状态 U_t 有一种产生事件 A 的倾向。倾向在这里肯定是被看做一种广义的原因的。检视这种说明是如何适用于那个关于飞盘的例子的就将是足够的了，因为米尔恩的例子并没有引起任何额外的问题。

为了能在这种倾向理论的框架内恰当地处理那个关于飞盘的例子，给所有相关的事件添加时间下标是很重要的。令 U_t 为某日起始时的宇宙状态。令 D_v 为“当晚在时刻 v 所抽到的飞盘是有缺陷的”这个事件。令 M_u 为“这一有缺陷的飞盘是那天白天在时刻 u 由机器 1 生产出来的”这个事件。显而易见的是，我们有 $t < u < v$。那个问题现在就变为如何去解释 $P(D_v \mid M_u)$ 和 $P(M_u \mid D_v)$ 这两个条件概率了。正如在前一种方案中所见，所有概率都是有条件的。如果我们写出 $P(A)$ 这样形式的概率，它只能是 $P(A \mid U_t)$ 的一种缩写，其中 U_t 是宇宙的一种状态。因此，基本条件概率在这种理论中具有 $P(A \mid U_t)$ 这样的形式。然而，在 $P(D_v \mid M_u)$ 和 $P(M_u \mid D_v)$ 方面，M_u 和 D_v 都不是宇宙状态而是特定的事件。我们现在所论及的是以事件为条件的概率，我们又要再一次细察它们在目前这个理论中可以有怎样的意义。

让我们以前一种方案作类比，首先尝试把 $P(D_v \mid M_u)$ 解释为 $P(D_v \mid M_u \,\&\, U_t)$。可问题在于，$M_u \,\&\, U_t$ 并不是宇宙在某一时刻的一种状态。假设我们想要把它转变为宇宙在稍后的时刻 u 的一种状态（比方说 U_u），这样一来我们需要具体指明的不但包括在 u 所发生的一个事件，譬如 M_u，而且还要包括在 u 所发生的其他一切事件。更为糟糕的是，M_u 可能始终保持一样，而这些其他的事件则是不一样的，这样就会使 U_u 产生诸多不同的值，从而使 $P(D_v \mid U_u)$ 产生诸多不同的值。例如，在一个 U_u 中，供电系统可能在 t 与 u 之间出现剧烈的振荡，造成两台机器生产出有缺陷的飞盘的比例增加。而在另一个 U_u 中，可能不存在这样的干扰。$P(D_v \mid U_u)$ 的值在这两种场合中就会是不一样的。

因此，以我们在上一种方案中所使用的方式来解释 $P(D_v \mid M_u)$ 看来是没有希望的了。$P(M_u \mid D_v)$ 的情况甚至还要糟，因为如果我们把 $D_v \& U_t$ 扩展到 U_v，

那么 M_u 会在一个比 v 早的时刻发生，而这就使得 $P(M_u \mid U_v)$ 是不被认可的。就我所能设想到的，在这种理论中只有一种方式可以引入以事件为条件的概率，那就是以如下方式给它们在形式上作出定义：

$$P(A \mid B;\ U_t) = \text{def}\ \frac{P(A \ \&\ B \mid U_t)}{P(B \mid U_t)}\text{，仅当 } P(B \mid U_t) \neq 0$$

但是这些形式上的以事件为条件的概率并不享有构成倾向理论这种版本的基础的基本条件概率［$P(A \mid U_t)$］的那些重要特性。尤其是“$P(A \mid B) = p$”并不意味着 B 与 A 之间有任何一种具有因果性质的联系。因此，根据这种思路，通过否认以事件为条件的概率涉及任何类型的因果联系，汉弗莱斯悖论再次得到解决，尽管与前一种理论相比，它同时坚称基本意义上的条件概率确实包含一种因果联系。

我刚才所给出的是我本人对那种情况的分析，但它似乎与米勒在以下文段所说的相当一致：

> 如果 a 是指我从今天起能继续生存一年，c 是指我明天喜欢上了跳伞，……由 $p(a \mid c)$ 所测度出的因果影响（causal influence）是一种今天向一年后的一天施加的影响……这不是一种从 c 中所标明的时刻向 a 中所标明的时刻施加的影响……至于逆向条件概率 $p(c \mid a)$ 又怎么样呢？这表现为：相对于它——今天的世界——在一年以后会发展成一个我在其中仍然活着的世界，今天的世界有一种发展成一个我明天在其中会喜欢上跳伞的世界的倾向……这种因果压力（causal pressure）是今天向明天施加的，而不是久远的将来向明天施加的。
>
> （Miller，1994：189）

虽然我对此处所给出的与 $p(c \mid a)$ 等值的日常语言还有些疑虑，但与我本人的分析相一致的一点是：既否认在 $p(c \mid a)$ 中存在着从 a 向 c 的因果压力，也否认在 $p(a \mid c)$ 中存在着从 c 向 a 的因果影响。实际上，这就是在否认以事件为条件的概率会涉及事件之间的任何因果型的影响（causal-type influence）。此处所宣称的是，影响是从今天向一年后的一天施加的，或者是从今天向明天施加的。换句话说，这种因果型的压力（causal-type pressure）是从今天的宇宙状态向处于未来的事件传递的。它并不把以事件为条件的概率所包含的两个未来事件联系起来。

最后让我们在费策尔所提出的相关条件单例倾向理论的语境下检视汉弗莱斯悖论。就像在上一种方案中那样，我们会把注意力放在那个关于飞盘的例子上，并会用到前面已经引入了的那些时间下标。正如在前两种方案中所见，我们可以在基本意义上的条件概率与以事件为条件的概率之间作出区分。在这种理论的框架内，基本条件概率的形式为 $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{R}_t)$，其中 R_t 是（律则地和/或因果地）相关的条件的一个全集，这些条件在时刻 t 在世界中被例示。R_t 是由那些与正被考虑中的事件的发生有关的所有条件构成的，但它并不等于宇宙在 t 的全部状态。这正是费策尔的单例倾向理论的版本区别于米勒和后期的波普尔的版本的地方。“$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{R}_t) = p$” 意味着条件 R_t 有一种在稍晚于 t 的某个时刻产生事件 A 的其程度为 p 的倾向。正如在前一个方案中，在这里倾向被视为一种广义的原因。

让我们像前面那样提出这样的问题，即 $P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{M}_u)$ 和 $P(\mathrm{M}_u \mid \mathrm{D}_v)$ 这两个以事件为条件的概率在这种理论中是如何得到解释的？事实上，$P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{M}_u)$ 可以被相当直截了当地解释为 $P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{M}_u \ \& \ \mathrm{R}_t)$。在 t 时刻，相关条件集是 R_t。然而，在随后的时刻 u，那个最终会被选中的飞盘由机器 1 生产了出来。这正是事件 M_u。这个事件的发生是 D_v 在 u 的相关条件集的一部分。因此，我们有 $P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{M}_u) = P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{M}_u \ \& \ \mathrm{R}_t) = P(\mathrm{D}_v \mid \mathrm{R}_u)$。可见，这种以事件为条件的概率可以被解释为另一个时刻的基本条件概率，因而具有基本条件概率的因果影响。然而，那个逆向的以事件为条件的概率 $P(\mathrm{M}_u \mid \mathrm{D}_v)$ 是不能以这种方式得到解释的。如果我们试图把 $\mathrm{D}_v \ \& \ \mathrm{R}_t$ 扩展为 R_v，那么 $P(\mathrm{M}_u \mid \mathrm{R}_v)$ 作为一种被视为广义原因的倾向不再是有意义的，因为 v 是晚于 u 的，这里把因果性的方向弄错了。当然，这样一些以事件为条件的概率仍然可以在形式化的意义上通过定义来被引入，这个定义类似于之前给出的那个。

通过表明只有某些而非全部以事件为条件的概率是（广义原因的意义上的）倾向，汉弗莱斯悖论在费策尔的理论框架内就以这种方法得到了解决。费策尔正是这样说的，“由于它们的‘因果指向性’（causal directedness），倾向既不可能被适当地形式化为‘绝对’概率，也不可能被适当地形式化为同时满足逆向的和正向的概率关系的‘条件’概率。”（Fetzer，1982：195）他还说道：“（在满足标准的公理——例如贝叶斯定理——的意义上）倾向并不是概率，因为它们是有因果指向性的，这一点在汉弗莱斯的论文（Humphreys，1985）发表以后才被普遍认识到。”（Fetzer，1991：297－298）

按照费策尔当时的说法，倾向并不满足标准的柯尔莫哥洛夫公理。然而，费策尔曾经与纽特（D. Nute）合作，发展出了一组可供选择的针对倾向的公理。他把这个系统叫做“一个概率性的因果演算”（a probabilistic causal calculus），

这个系统是在他 1981 年出版的书（Fetzer，1981：59－67）中被提出的。它有这样的特征，“p 可以以强度 n 引起 q（其中 p 是先于 q 或与 q 同时发生的），而无论 q 是否以任何强度 m 引起 p……”（Fetzer，1981：284）

费策尔的立场看来可能是：倾向不是概率，但是，鉴于费策尔－纽特概率性因果演算有很多公理在性质上肯定是概率性的，所以费策尔是会对这种表述有异议的。因此，可以更为准确地把费策尔－纽特演算形容为一种非标准的概率论。正如费策尔本人所说：

> 也许这意味着这种倾向诠释不得不被归类为一种关于概率的非标准的构想，而这是不会连它作为一种概率解释的重要性也消除掉的！非欧几里得几何学起初是作为一种非标准的几何学构想出现的，但它的意义仍然重大。因此，正如几何学的非欧几里得诠释在狭义相对论和广义相对论问世以前曾坚持几何学的标准说明一样，也许概率的倾向诠释也会坚持概率的标准说明。
>
> （Fetzer，1981：285）

由于“非标准的”会让人联想到“非标准分析”这样的含义，所以可能比较可取的是，通过与非欧几里得几何学类比，把这个概率性因果演算称为一种非柯尔莫哥洛夫概率论。

费策尔和纽特提出一种非柯尔莫哥洛夫概率论是一个大胆的创举，但它的革命性自然会在人们对它的普遍接受上引起问题。我们有数量庞大的定理是以柯尔莫哥洛夫公理为基础的。数学共同体是不大可能放弃这个强大的体系而用另一个来替代它的，除非这样做有相当大的得益。这就是一种保留了标准的柯尔莫哥洛夫公理的倾向理论（比如说长程倾向理论）比较受欢迎的一个原因。

我对倾向理论的概述到此结束。尽管这些进路的每一种都有一些吸引人的特征，但我个人更偏爱长程倾向理论，因而我将在下一章对这种类型的倾向理论的一个特定的版本作出详尽的阐述。

第七章　倾向理论（二）：对一个特定的倾向理论的阐述

在上一章对几种倾向理论作出概述以后，现在我将尝试详尽地阐述一个值得单独提及的倾向理论。这个理论所属的类型被归类为**长程倾向**。因此，它较为接近波普尔早期对倾向的看法而非他后期的观点。它还是各种倾向理论中与冯·米泽斯的频率理论最为接近的。这两种观点有以下共同的见解：①概率论是像力学或电磁理论那样的一门数理科学；②这门科学探讨的是物质世界中所发现的随机现象；③它的公理是得到经验认证的；④概率像质量或电荷一样，客观地存在于物质世界之中，而且具有确定的尽管可能是未知的值。

虽然有这些相似之处，但这两种理论之间当然还是有差别的。首先，概率作为倾向是与可重复条件而不是聚合相联系的。第二点区别涉及概率论的公理与冯·米泽斯的两条经验定律之间的关系。冯·米泽斯认为那些公理是通过一个抽象或理想化的过程而从这两个定律获得的。然而，在倾向理论目前的这个版本中，公理被认为是用来解释经验定律并使之更为精确的。正如我们将会看到的，这种构想解决了我们在冯·米泽斯的说明中特别提到的一些问题。这也是与第三处至关重要的差异有关的。频率理论给出了一个以可观测量（频率）为依据的理论概念（概率）的定义。因此，它是建基于一种操作主义的科学哲学的。恰恰相反，下面要介绍的倾向理论的版本是建基于一种非操作主义的进路的，按照这种进路，理论概念并非依据可观察物而得到定义。它们是作为未加定义的概念被引入的，它们可能得到公理化的刻画，然后以不那么直接的方式与可观察物相联系。为了阐述我的版本的倾向理论，有必要详细而清楚地说明一种关于自然科学中的概念创新（conceptual innovation）的非操作主义的理论，这将在紧接下来的一节（“对操作主义的批评”）进行。然而，在着手这样做之前，我想再提出一点我对于操作主义的看法。

正如在第四章中所指出的，概率的主观理论是以操作主义为基础的。不过，现在我正打算阐述倾向理论的一个版本，这个版本是基于一种明确拒斥操作主义的非操作主义说明的。

乍看之下这似乎不是一个严重的问题。毕竟主观理论和倾向理论是根本不同的。主观理论认为概率是置信度因而是认识论的，而倾向理论则把概率视为物质世界的特性因而是客观的。既然这些极大的差异已经得到了承认，为什么这两个

理论有彻底不一样的基础会存在问题？其实这是我们可以预料到的。

对于某个仅仅支持这两个理论中的一个而拒斥另一个的人来说，这无疑是没有问题的。然而，我已经在第六章中论证表明，除了倾向以外，是需要主观概率来处理单个事例的。这种看法将会在第八章中得到详细说明，到时我会论证支持一种多元主义的概率观，这种观点认为：存在着几种不同的概率解释，它们都是有效的，分别适用于不同的情况。我还会进一步论证表明，这些有效解释既包括主观理论，也包括本章所提到的倾向理论。因为前一种理论是立足于操作主义的，而后一种则是建立在对操作主义的拒斥的基础上的，所以，似乎我的多元主义既接受操作主义又拒斥操作主义。这其实是一个严重的问题，但试图在这里处理这个问题并不合适。因此，我必须请读者先把这个难题留在你们的心中。我将在下一章再回过头来讨论该问题并尝试解决它。

第一节　对操作主义的批评：一种关于自然科学中的概念创新的非操作主义理论[①]

由于我对频率理论的一个主要批评意见是：它是以一种我认为是不恰当的操作主义自然科学哲学为基础的。所以，在我开始尝试阐述一个客观的但非频率的概率理论之前，我会对操作主义展开批评，并提出一种与别不同的关于自然科学中的概念创新的理论。正如我们已经看到的，冯·米泽斯是把他关于概率的操作主义说明建基于马赫早期对于牛顿式的质量所下的操作主义定义的。我将以类似的方式把我关于概率的非操作主义的倾向说明建立在本节所提出的那种关于自然科学中的概念创新的非操作主义理论的基础上。为了作出更为近似的比较，我将以牛顿式的质量为例来说明这种非操作主义的理论。

按照操作主义，自然科学的理论概念应该依据可观察概念来加以定义。我们可以以一种更为动态的方式来表达这个断言，那就是说：被引入自然科学的每一个新概念都必须被赋予一个以观察过程或实验过程为依据的操作定义。因此，例如说，长度的概念可以通过明确规定一种要用到刚性量杆的测度程序来被引入。现在让我们来看一看这样一种说明所面临的一些困难。

第一个问题是，单独一个操作定义总体上并不能满足一个概念的所有应用。就拿我们关于长度的例子来说，那种借助刚性量杆的程序对于在从几厘米到几百米的范围内的长度可能是恰当的，但是对于地球与太阳之间的距离又怎么样呢？再者，它对于一颗以光速运动的电子的直径而言又怎么样呢？看来我们必须引入一个操作定义序列。当然了，我们各种不同的操作定义在它们重叠的地方必须是一致的，但这又存在着别的复杂情况。假设我们想要测量地面上很长的距离，大

约有几千米。我们不得不增补在经纬仪的配合下我们对于米尺的用法。现在为了使用这些器具，我们又不得不作出某些理论上的假定。例如，我们必须假定光线是以直线传播的，并且空间是欧几里得式的。可是在作出这些假定之前，想必我们是应该要核实它们是否成立的。不过，从操作主义的立场来看似乎是不可能这样做的。根据操作主义，只有在一个概念已被给出一个操作定义以后我们才可以使用它。因此，在引入长度概念之前我们必须核实一下，对于大约几千米的距离，空间是否为欧几里得式的。这无疑是不可能的！

还有一个相关的困难是关于测量方法的改进的。假设我们引入了一个依据刚性量杆的素朴的长度定义，并运用它来测量长达——比方说——500 米的长度。那种借助经纬仪的方法便由此被发现（discover）了。它旋即就被运用到了对超过 50 米的长度的测量上。通常我们会说，一种更为精确的用以测量超过 50 米的长度的方法已经被发现了。然而，根据操作主义的观点，这种说法是不允许的。我们已经通过那种借助刚性量杆的程序定义了长度，因而我们至多可以这样谈论另一种测量方法，即它以与长度的定义性程序近乎一致的方式给出了结果。说通过别的可供选择的方法所给出的结果比定义性方法所给出的更为接近那个长度的真实的值是没有意义的。那就好比先把一米定义为这根杆上某两点间的距离，然后说更为准确的测量已显示出那段距离并非精确地为一米。

对于操作主义者的另一个问题的提出是基于以下事实的，即几乎所有的测量方法都必定是有待于修正的。请再次考虑我们以刚性量杆为依据所作的简单定义。为了让这在实践上是切实可行的，我们常常必须作出一些修正。为此，我们必须确保那根杆子的温度对于其长度之得以定义而言是标准温度，要不然的话就必须引入对温度的修正。如果那根杆子被用来测量一段垂直的距离，我们可能必须对引力扭曲作出修正。还有就是，如果那根杆子是铁制的，我们可能必须对电扭曲或磁扭曲作出修正。现在让我们更为详尽地考虑关于给温度作修正的问题。假设我们已经根据一个要用到金属杆子的定义性程序定义了长度，但并没有把对温度的修正考虑在内。有一天，明亮的阳光透过窗户投射进了实验室，使得用于测量的杆子和被测量的木块变热。被观察到的是，相对于那根杆子，那块木头的长度与前一天相比有了变化（在此情况下它是收缩了）。然而，一位聪明的实验者随即指出，事实上是用于测量的杆子比木块膨胀得更厉害。他把杆子冷却至正常的室温，并求得了木块的新长度的一个更为准确的值。的确，他现在表明，它是膨胀了而非收缩了。但是，根据操作主义的观点，怎样才能使这种做法是可接受的呢？长度通过最初设定的程序集（set of procedures）已经得到了定义，按照这个定义，那块木头必定是收缩了而非膨胀了。

就这一切而言，操作主义者唯一可取的态度便是说，我们已经决定采纳一个

新的长度定义了。对于超过50米的长度，我们关于长度的素朴的刚性金属棒定义被一个经纬仪定义取代了，而在某些其他情况下要引入对温度的修正。但是操作主义者现在不得不对新定义是如何逐步形成的和为什么我们会选择采纳某个定义而非另一个给予说明。

如果我们牢记修正所涉及的概念必须**本身**是操作上得到定义的，这里对操作主义者来说的那些问题会变得更为糟糕。难道这不会导致一个恶性循环吗？波普尔论证表明这确实如此：

> 要反对这种观点（操作主义——引者注），可以表明，**测量预设了理论**。不存在任何脱离理论的测量，也不存在任何可以令人满意地用非理论词项来描述的操作。为此所作的尝试总是循环的；例如，对长度的测量的描述需要一个关于测量热和温度的（初步的）理论；但这些又反过来牵涉到了长度的测量。
>
> （Popper，1963：62）

我看不到有什么方法可以解决操作主义者的这些困难，因此现在我将转为阐述一种可供选择的关于自然科学中概念创新的理论，它确实解决了那些问题。

这种概念创新理论的基本观点是，新概念不是通过操作定义被引入的，而是作为一个理论中的未加定义的词项被引入的，它们由那个理论的诸假定不完全地刻画。通过尝试从那个理论中推导出观察事实或定律就使它与观察建立了联系。在这些推导中，人们可能会作出关于某个或某些新概念的定性假定。如果被观察到的事实或定律得到了令人满意的解释，那么那个理论就被认为获得了认证，而且它接下来可能会被用来构想测量新概念在特定情境中的数值的方法。

现在我将以牛顿式的质量为例来阐述这种对于概念创新的说明。这个例子是适当的，因为质量概念（与重量相对）在牛顿提出他的新力学理论之前实际上是不存在的。[②]许多相关的结论其实早已为观察和实验所确立，尤其是伽利略自由落体定律和开普勒行星运动定律，但是对这些结论的说明可以无须使用质量概念。这样，这就是一个合适的事例，可以用来检视一个新概念是如何与观察发现和实验发现建立联系的。为了使讨论简化，我将限定于考虑开普勒第三定律是如何从牛顿的理论中推导出来的。

开普勒第三定律是关于行星P环绕太阳S的运动的（图7.1）。

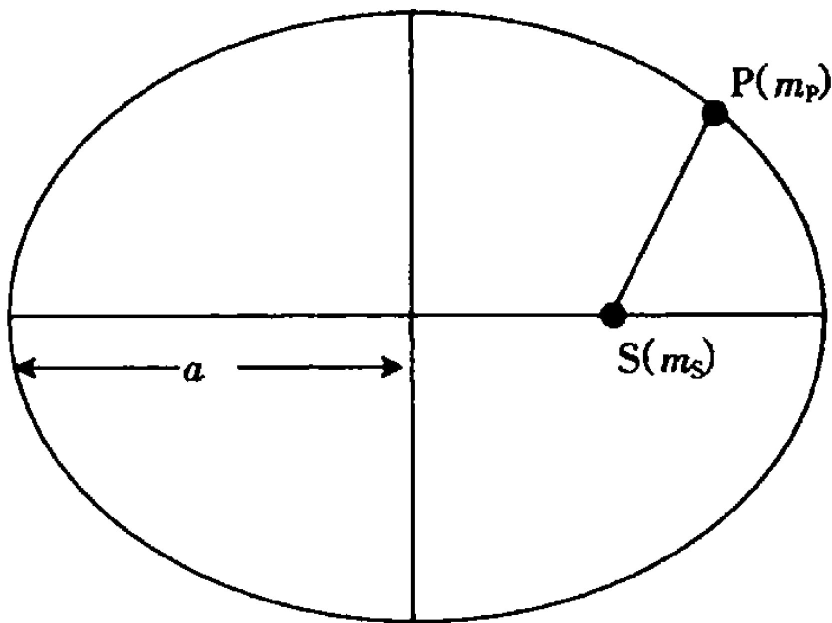


图 7.1　一颗质量为 m_P 的行星 P 环绕着质量为 m_S 的太阳 S 运动

按照开普勒第一定律，P 的轨道是一个椭圆，太阳 S 位于椭圆的一个焦点上。假设该椭圆长半轴的长度为 a，P 的公转周期为 T，那么开普勒第三定律说明了 a^3/T^2 对所有行星都是恒定不变的。

开普勒三定律并不包含力的概念或质量的概念，但这些概念被牛顿引入了他的理论，这可被概述为两个为人熟知的矢量方程：

$$\mathbf{P} = m\mathbf{f}$$

和

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ \text{（万有引力定律）}$$

让我们假设行星 P 有质量 m_P，太阳 S 有质量 m_S。让我们忽略诸行星本身之间的引力的相互作用，从而把该问题归约为一个二体问题。如果接下来我们应用牛顿理论的那两个方程，我们可以演绎出③

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(m_S + m_P)}{4\pi^2}$$

我们现在假定太阳的质量要比那颗行星的质量大很多很多（$m_S \gg m_P$），因而得出

$$\frac{a^3}{T^2} \approx \frac{\gamma m_S}{4\pi^2}\ \text{（亦即为常数）}$$

这是开普勒第三定律的一个近似的版本。尽管 $m_S \gg m_P$ 这个假定是自然而然地被作出的，也因此易于被忽视，但是它包含了我们一直讨论的那个问题的解决方案。在这一点上我们需要一个操作主义的质量定义吗？完全没必要。通过作出一个定性的物理假定，即一质量要比另一质量大很多很多，我们就可以充分检验涉及质量的理论。再说，这种定性假定是得到了一个粗略的（或直观的）质量概念的辩护的。如果我们把质量视为“物质之量”（quantity of matter），那么，通过观察到太阳要比诸行星大很多很多并作出以下假定，即它的物质密度无论如何都是类似于诸行星的物质密度的，我们就得到了 $m_S \gg m_P$ 。因此，我们一开始并不需要一个被精确定义的质量概念。一个相当粗略和直观的质量概念可以催生一个定性假定并因而促成对于一个含有确切的质量观念的理论的精确的检验。

这个例子表明了一个含有新概念的新理论是如何做到无须新概念的操作定义而能够解释涉及这些概念的观察资料和观察定律的。牛顿的新理论事实上对大量的东西给予了解释。除了伽利略定律和开普勒第三定律以外，它还能够解释碰撞定律、月球运动对潮汐的影响以及月球运动的均差，而且它使得那些可以对照观察资料加以检验的关于地球和彗星的形状的理论的推导成为可能。它也能够解释开普勒第三定律的某些偏差，比如行星之间的引力的相互作用所造成的行星轨道的摄动。正如我们对开普勒第三定律所做的那样，所有这些解释和推导都能以大致相同的方式得到分析。总的结论就是，牛顿的新理论可以对照观察材料被充分地检验并且得到相当好的认证，而它所包含的新概念无须引入任何操作定义。因此，让我们进入我们对精密科学中的概念创新的说明的第二阶段。假设一个具有新概念的新理论已经得到了检验和认证，那它在某些特定的场合下就能被用来获得关于那些新概念的一些测量结果，这也是无须任何操作定义的。现在我会在关于牛顿式的质量的例子中说明这种程序。

让我们来考虑像火星那样的一颗行星的质量是如何可能被测量的。当然了，这个例子是我特地选来说明，用天平来引入以实验步骤为依据的操作定义是没有效用的。虽然这样的一种方法行不通，但是只要我们根据理论作出细致和适当的计算，还是可以使问题得以解决的。为此，让我们假设我们有一颗行星 P，它与太阳的距离为 a_P ，它的轨道周期为 T_P 。这样一来，通过假定 $m_S \gg m_P$ ，我们照旧有

$$\frac{{a_P}^3}{{T_P}^2} \approx \frac{\gamma m_S}{4\pi^2}$$

但现在假设那颗行星有一颗质量为 m_M 的卫星 M，它与那颗行星的距离为 a_M ，它的轨道周期为 T_M 。如果我们假定 $m_P \gg m_M$ ，我们照旧得到

$$\frac{a_M^{\ 3}}{T_M^{\ 2}} \approx \frac{\gamma m_P}{4\pi^2}$$

因此，两式相除，我们得出

$$\frac{m_P}{m_S} \approx (\frac{a_M}{a_P})^3(\frac{T_P}{T_M})^2$$

这个等式右边所有的量都能够由天文学的测量来决定，因而我们可获得比率 m_P/m_S 的一个值。例如，火星有一个卫星火卫二，其周期为 30.3 小时。因此，我们得到 $m_{Mars}/m_{Sun} = 3.4 \times 10^{-7}$，这给出了火星的质量相对于太阳的质量的比值的一个测量结果。

我们现在可以陈述我们关于自然科学中的概念创新的非操作主义理论了。让我们假设，有一个新理论被提出，它包含了新概念。通过从新理论演绎出一些不含新概念的后承，并拿这些后承与经验相比较，我们可以对它实施初步的检验。为了进行这些演绎推理，我们并不需要任何关于新概念的操作定义，但是，对于这些新概念，一般来说我们会作出一些关于特定物理情景中的近似的相等性或显著的不相等性的定性假定，比如说“ $m_S \gg m_P$ ”这个假定。那个新理论加上这些定性假定会导出以下结论，即某些后承大致成立。这样，这些后承就能被拿来与过去或将来的实验结果或观察结果相比较。如果通过这些比较那个新理论得到了验证，那么，它就会被接受，而且那些用以测量新概念在特定情况下的数值的方法便在此基础上被设计出来了，这正是我们以测量火星的质量相对于太阳的质量的比值为例所说明的。这再次说明在设计测量方法的这个阶段不需要用到操作定义。

我现在将尝试表明这个关于概念创新的理论避免了我们之前指出的操作主义所面临的困难。第一个问题的产生是因为当一个概念被扩展至新领域时需要新的操作定义。这些新操作定义以之为基础的定律在引入该概念本身之前必须被明显地核实。那个关于用经纬仪来扩展长度的刚性量杆定义的例子说明了这一点。经纬仪是以欧几里得几何学为基础的，从操作主义的立场来看，欧几里得几何学的真实性在引入长度概念之前必须被明显地核实。

我们的理论解决了这个问题，因为它认为，概念并不是通过操作定义来获得意义的，而是通过它们在相关联的理论系列中所处的位置来获得意义的。对于这些理论之间的逻辑关系和我们在实践中对待它们的方式的说明给我们提供了概念的含义。因此，无须获得新的操作定义，只要是被包含在一系列新的和更普遍的

理论中，一个概念就的确能得到扩展。如果我们接受操作主义的观点，我们是不能骤然假定一个具有新概念的新理论为真的。新概念只有在它们已经在操作上被定义以后才会有意义。因此，在引入概念之前，操作主义者必须核实他的定义将要以之为基础的定律。总体而言，这种方案是不能实现的，这一点可以从以下做法的荒谬性看出来，即试图在引入长度概念之前核实欧几里得几何学是否成立。此外，我们关于概念创新的非操作的理论表明了这是不必要的。我们可以颇为自由地在一个新理论中引入一个新的未加定义的概念。这样的话，唯一的问题就是如何检验这个理论，而正如我们已经看到的，通过作出关于该新概念在特定情境中的定性假定，这个问题便能解决掉。

操作主义所面临的另一个困难就是操作主义者如何能够给测量方法的修正和改进提供说明。例如，我们经常谈到"发现一种用以测量一个概念的更为精确的方法"，但是，如果先前的方法是那个概念的定义，那如何可能存在任何更为精确地测量它的方法呢？此外，我们还常常引入对温度、引力等等的修正。但我们如何可能修正一个定义呢？而且，如果我们试图这样做的话，难道这不会导致恶性循环吗？譬如说，在这样一个循环中，长度是根据温度来定义的，反之亦然。

一旦我们认可理论的首要地位，所有这些问题就都消失了。测量方法仅仅在理论的基础上被引入；没有理由说，以特定的一组理论为出发点，我们就应该不能设计出两种测量方法——一种比另一种更为准确。再说，我们的测量方法不仅包含了普遍的理论，而且包含了特定的定性假定，比如说，实验室里的温度变化是可被忽略的。我们总是可以把这样的一个假定替换为一个更缜密的假定，从而修正我们先前的测量方法。

我对操作主义的批评和对一种关于自然科学中的概念创新的非操作主义理论的阐述到此就结束了。在下一节，为了提出我自己的版本的倾向解释，我将尝试把这个理论应用到概率上。在这样做之前，再引入一个将有助于我们对概率的倾向理论的阐发的概念会是有益的。这就是"科学理论的深度"中的**深度**(depth)这一概念。

波普尔（Popper，1957c）[④]在引入深度这个概念时写道：

> 每当我们借助一个具有更高普遍性程度的新的猜想性理论去着手解释某个猜想性定律或理论的时候，我们都会发现关于这个世界的更多的东西，我们正试图更具深度地洞察它的秘密。
>
> （Popper，1957c：28）

波普尔并没有尝试详尽地说明在何种意义上一个理论与另一个相比可以给实在提

供一种更具深度的描述。不过，他倒是提出了一个用以判定一个较高层次的理论比它所解释的一个较低层次的理论具有更大深度的充分条件。这可以由关于牛顿力学的历史事例来说明。

波普尔注意到，牛顿理论不仅仅解释了伽利略定律和开普勒第三定律，而且它还修正了它们。例如，开普勒第一定律说明了所有行星都作椭圆运动，并且太阳位于其中一个焦点上。它的近似真实性其实不是从牛顿理论推导出来的，但牛顿理论还是预测了由于行星间引力的相互吸引所以那些椭圆轨道会存在摄动。波普尔对这个例子作了概括，他提议说，一个较高层次的理论应该被视为比它所解释的那些理论**更具深度**，如果它“**在解释了它们的同时还修正了它们**”的话（Popper，1957c：33）。牛顿理论尤其如此，因为它在解释了开普勒第三定律的同时还修正了它们，所以它比开普勒第三定律**更具深度**。

我肯定是支持采纳波普尔的提议的，但应该着重指出的是，波普尔当时的意图就是要给出一个判定深度的充分条件，而且他本人表示可能还有其他的条件。因此，我将提出另一个判定深度的充分条件，它是对波普尔的条件的轻微修改，但它更容易适用于概率论。让我们假设，在牛顿之前我们并没有开普勒第三定律而只有施诺克尔海姆定律（Schnorkelheim's law）S，它说明了行星环绕太阳沿着尽管不是精确的但也大致是圆形的闭合曲线运动。现在牛顿理论被发明出来了，我们从它可以照例推断出 S′：行星环绕太阳以受到小摄动干扰的椭圆形运动。而 S′并不是以它与开普勒第一定律相矛盾的方式与 S 相矛盾。事实上，S′衍推 S。可见，S′并不是修正了 S，而是**使S 更为精确**。“使一个定律更为精确”在我看来也是一个判定具有更大深度的充分条件。因此，我会把波普尔的条件扩展如下：“一个较高层次的理论会比一个较低层次的理论具有更大的深度，如果它在解释了旧有理论的同时还**修**正了它或**使它更为精确**的话。”

现在让我来简述一下我打算如何把本节的这些想法应用于概率论。在力学中，一组经验定律——尤其是伽利略定律和开普勒第三定律——曾得到过一个更具深度的新理论（牛顿理论）的解释，该理论含有“质量”这个新的和未加定义的概念。在概率论中，我们也有经验定律：统计频率稳定性定律和排除赌博系统定律。我们的目标应该在于把概率论表征为以概率这个新概念为依据来解释这些定律的理论。此外，概率论不但应该解释这些定律，而且应该修正它们或使它们更为精确——从而证明其自身是一个更具深度的理论。新概念“质量”的经验含义的获得并不是通过操作定义，而是通过这个假定，即一质量（某一行星的质量）与另一质量（太阳的质量）相比是可被忽略的。如果这个类比在此也有望成立的话，概率将不会（像冯·米泽斯所声称的那样）经由以相对频率为依据的定义获得经验含义，而是**通过在相较于另一个概率的情况下把某个概率忽**

略掉的决定获得经验含义的。在本章的剩余部分，我将尝试以刚刚点明的这种方式去发展概率论。

第二节　一个针对概率陈述的证伪规则

我们的问题是：如何精确地把理论词项（概率）与观察词项（频率）相联系。结果表明，对这个问题的解答在于考虑另一个问题，那个问题是波普尔对概率哲学提出的。这是一个关于可证伪性如何适用于概率的问题。由于波普尔在《科学发现的逻辑》中是对可证伪性加以提倡的，而且他也对概率相当感兴趣，所以他对可证伪性如何适用于概率作出考虑就是非常自然的事情了，而这正是他在其名著的第八章中所做的。结果表明，这存在着一个与概率陈述的可证伪性相关的难题，对此，波普尔本人非常清晰地陈述如下：

> 概率与经验之间的关系也仍然是需要澄清的。在探究这个问题时，我们会发现，对于我的方法论观点，有一个起初看来几乎不可克服的反对意见。因为尽管概率陈述在经验科学中起着一个如此至关重要的作用，但它们原来竟然是原则上**不受严格证伪影响的**。不过，就是这块绊脚石将成为检验我的理论以便弄清它有什么价值的试金石。
>
> （Popper，1934：146）

为了看清楚为什么概率陈述不能被证伪，让我们举一个最简单的例子。假设我们正在抛掷一枚弯曲的硬币，我们假定各次抛掷都是独立的并且正面朝上的概率是 p。令 $Prob(m/n)$为在 n 次抛掷中得到 m 次正面朝上的概率。于是我们有

$$Prob(m/n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

因此，无论我们抛掷那枚硬币有多久（亦即无论 n 有多大），也无论我们所观察到的正面朝上的次数是多少（亦即无论 m 的数值是多少），我们的结果将总是具有一个有限的非零概率。它将不会被我们的假定严格排除。换句话说，这些假定是“原则上**不受严格证伪影响的**”。

波普尔对这个难题的解答在于诉诸“方法论上的可证伪性”这个概念。尽管严格地说，概率陈述不是可证伪的，但是它们能被作为可证伪的陈述来使用，而事实上它们就是这样被物理学家们所使用的。他将这种情况表述如下：“一个物理学家通常完全能决定他是否可以暂时把某个特定的概率假说接纳为‘经验

上被认证的'，或他是否应当把它拒斥为'实践上被证伪的'……"（Popper，1934：191）

波普尔的处理方式已经被标准的统计实践强有力地证明为有效的。工作在一线的统计学家总是在连续不断地运用一连串统计检验中的这个或那个。每当他们这样做的时候，他们都是在不明言地把概率假说作为可证伪的陈述来使用，尽管从严格的逻辑的观点来看，概率假说都是不可证伪的。在任何统计检验中，这种做法的步骤是，先具体指定一个所谓的"拒绝域"，接下来如果检验统计量的观测值处于这个拒绝域之内，则把受检假说（比方说 H）视为被反驳了的。而当 H 为真时，总是存在着一个有限的概率使检验统计量的观测值有可能处于拒绝域内。因此，当根据严格的逻辑 H 尚未被反驳掉时，H 便被看做遭到了反驳。这就等于说，H 是被作为一个可证伪的陈述来使用的，即使严格说来它不是可证伪的，又或者以另一种说法来表达相同的意思，那便是，方法论上的可证伪性正为人们所采纳。

最为重要的几个统计检验是在 1900 年至 1935 年间开始被采用的。卡尔·皮尔逊（Karl Pearson）(Pearson，1900）提出了卡方检验，戈塞特（W. S. Gosset）(Gosset，1908）谦逊地以"学生"为笔名发表论文，引入了 t 检验。正是在这个阶段费希尔开始了他的工作。他赋予了卡尔·皮尔逊和学生氏的检验一个较好的数学基础，并引入了他自己的 F 检验和方差分析。费希尔有两本重要的著作，给统计学家介绍了这些新的观念和技巧。第一本是《研究者用的统计方法》(*Statistical Methods for Research Workers*)(1925)，第二本是《实验设计》（*The Design of Experiments*)(1935)。卡方检验、t 检验与 F 检验在今天仍然得到广泛使用，尽管随后当然还有其他检验被设计出来。现在有趣的事情是，统计检验从被引入到发展为被非常广泛地采用都是相当独立于波普尔对方法论上的可证伪性的提倡的。然而，统计检验是不明言地立足于方法论上的可证伪性的，统计学家们对它们的引入和普遍采用给波普尔的处理方式的价值提供了显著的验证。

现在让我们尝试把应用于概率的方法论上的可证伪性表述得稍微精确一些。方法论上的可证伪性的想法是，尽管概率陈述严格说来不是可证伪的，但是它们在实践上应该被当做可证伪的陈述来使用。如果我们采纳这种立场，我们就应当尝试去表述一个这样的规则，它可被称为**概率陈述的证伪规则**(falsifying rule for probability statements，FRPS)，它表明了概率陈述应该如何被用做可证伪的陈述。这样的一个规则应该显然是与统计检验的实践相一致的而且不明言地构成了它的基础。因此，通过让我们的规则仿效某些标准的统计检验，我们会得到一个可以被大致陈述如下的 FRPS。

令 H 为一个统计假说，并假设我们正试图让 H 接受某个证据的检验，该证

据是由一个包含了 n 个数据点 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的样本所构成的。令 X 为一个检验统计量，也就是说观测数据的一个函数 $X(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，它的值可以根据这些数据计算出来。假设我们可以重复地和独立地抽取这样一些容量为 n 的样本，那么 X 就是一个随机变量，它对于不同的样本具有不同的值。假设从 H 可以演绎出 X 有一个钟形分布 D，其轮廓大致如图 7.2 所示。

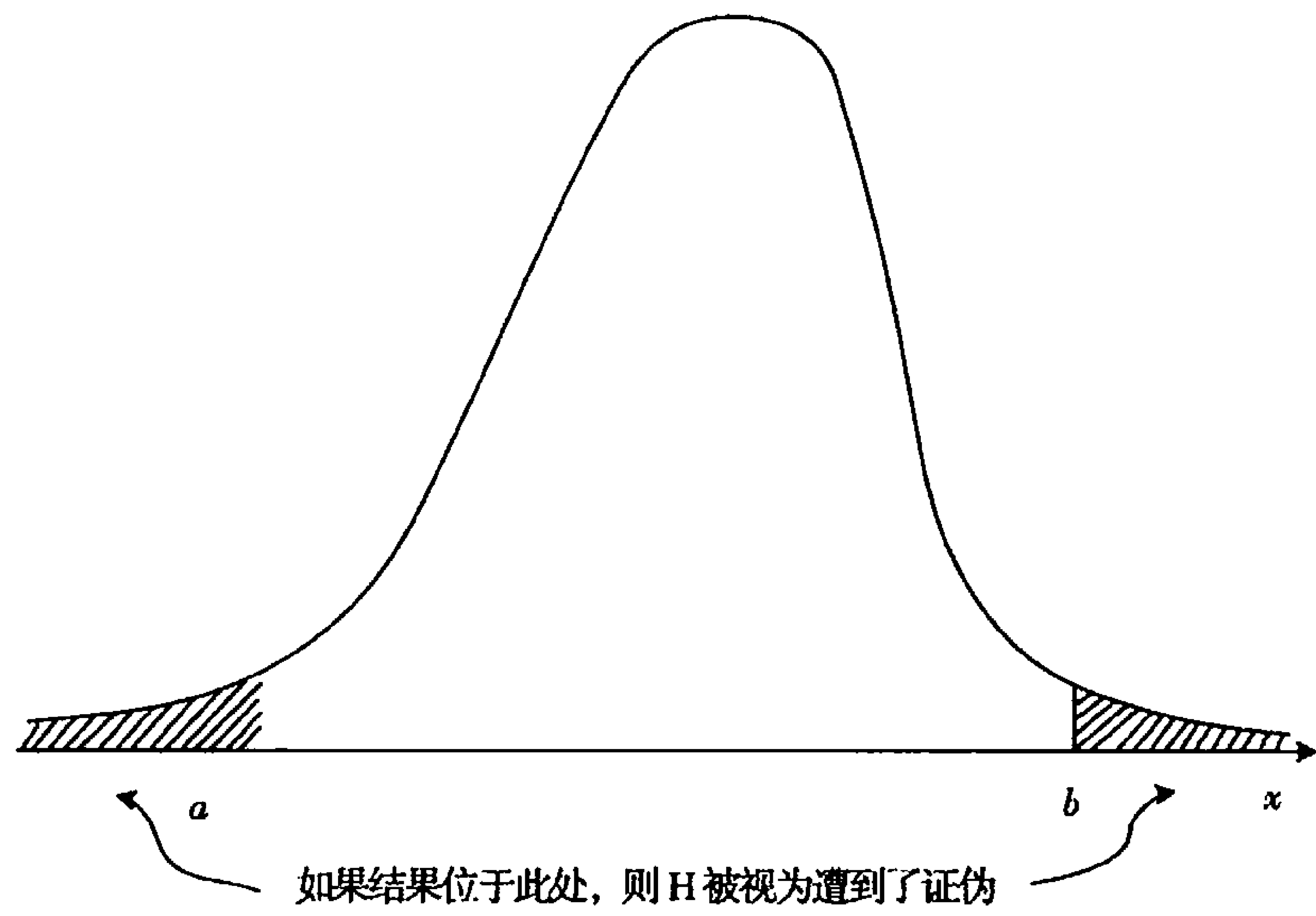


图 7.2　概率陈述的证伪规则（FRPS）

我们将会把这种形状的分布叫做**可证伪分布**（falsifiable distribution）。在 a 和 b 两点都被选定的情况下，D 被分成"头部"（即 $a \leqslant X \leqslant b$）和"双尾"（即 $X < a$ 或 $X > b$）。像这样的双尾的存在使得一个结果在双尾出现的概率有一个很小的值，这个数值被称为显著性水平。显著性水平通常在 1% 与 10% 之间选取，而 5% 则是最为常见的数值。我们的概率陈述的证伪规则现在表述为：如果 X 所得的值位于分布的双尾，这就应该被视为证伪 H；而如果 X 的值位于分布的头部，这就应该被视为验证 H。FRPS 根据其特点可以被非正式地描述为切掉可证伪分布双尾的规则。

大体说来，这个证伪规则是符合诸如卡方检验、t 检验或 F 检验这些标准的统计检验被应用时所采取的实际步骤的。其实这里存在着一些与单尾检验和双尾检验的用法有关的小差异，还存在着一个由内曼悖论（the Neyman paradox）提出的问题。不过，这些都是相当技术性的问题，我将不会在这里探讨它们，尽管有兴趣的读者将会在本章的注释⑤中找到一大段关于这个问题的更多和更全面的

数学论述。[5]在本书中，我仅仅会关注所给出的证伪规则与统计检验的实践之间的毋庸置疑的广泛的一致性，而我也只是会再提出一个对这条规则有利的意见。

这个意见是，我们的概率陈述的证伪规则是对决定论科学中处理误差的方式的非常自然的推广。为了表明这一点，我将试图把这个问题与关于“非精确区间”的问题联系起来，这正是波普尔（Popper，1934：68）所遵循的进路。假设我们正在检验一个决定论假说 H。在某些简单的场合中，我们可以演绎出：给定 H，一个特定的可测量的量 x 应该有一个值 x_0。我们接下来会测量 x，看看它是否确实等于 x_0。更常见的是，给定 H，我们可能演绎出两个可测量的量 y 和 z 成线性关系 $y \propto z$。我们接下来会测量 y 和 z 的若干个值对——比方说 (y_1, z_1)，…，(y_n, z_n)，看看这些对子是否确实落在一条直线上。现在是否我们会认为 H 遭到了证伪，只要 x 与 x_0 之间存在着任何差量，哪怕它们相差得很少，或者只要连接 (y_i, z_i) 的曲线与线性度有任何程度的偏离，哪怕是丝毫的偏离？当然不是。其实我们会预期 x 与 x_0 有一定程度的差别，如果两个量在实验上是不可分辨的或者如果 (y_i, z_i) **精确地**排列在一条线上，我们反而会感到惊奇。与 x_0 的差量或与线性度的偏离会被归因于“实验误差”。但现在我们可否说，无论 x 与 x_0 相差有多大，或者无论点 (y_i, z_i) 多么随机地分散在平面上，实验都与 H 相符合？我们可否认为实验误差在这样一些场合中就一直是这么大？当然了，我们会再一次拒斥这样一种荒谬的观点。事实上，如果我们所获得的结果充分接近 x_0，我们就会认为假说得到了认证；如果结果与 x_0 相差太远，我们就会认为假说遭到了证伪。换句话说，我们会用一个被大致标明界限的“非精确区间” $[x_0 - \phi, x_0 + \phi]$ 来围住 x_0，如果那个结果在这个区间内，就认为 H 得到了认证；反之，则认为 H 遭到了证伪。类似地，在 (y, z) 的例子中，我们会在平面上取一窄条，并认为它充分逼近一条直线。这样一来，这种程序想必是非常类似于采用一个证伪规则的。在这两个事例中，我们在理论上可以容许任何发散，无论发散有多大。在实践上无可否认我们是以一种有几分任意的方式画一条界线的，但也只是允许发散大到一定程度而已。在这两个事例中，这种决定使得那个基本假说是可证伪的。

如果我们考虑到实验误差可以在统计上得到处理，那这种相似性就会得到彰显。让我们以简单的例子来表明这一点，在这个例子中我们预测 $x = x_0$。那个关于 (y, z) 的例子也有相似的一面，但还涉及关于回归的各种须考虑的因素。各种对于相关量的测量可以被视为独立试验。这些试验的结果是作为 $X = x - x_0$ 的值被给出的，其中 X 是一个随机变量。对于一次特定的试验而言，X 的值显示出了那次测量所存在的误差度，亦即它偏离预测值 x_0 的程度。如果我们现在假定这个误差是大量相互独立的基本误差的总和，我们就会得出：X 关于 0 值有近似

正态的分布。当然了，这个演绎推理背后的假定并不总是似真的，其实误差随机变量的其他分布常常与观察符合得更好。

然而，分布的实际形式对于我们的目的来说是不重要的。问题是这样的，假设我们把某个分布 D 指派给误差随机变量 X。这种更为精细的统计处理方式如何与指派一个不具实验精确性的区间 $[x_0-\phi, x_0+\phi]$ 给 x_0 的惯常程序配合得当呢？答案是，D 必须是一个其头部（或者说接受域）A 为非精确区间的可证伪分布。但是现在我们看到，非精确区间的选取与概率陈述的证伪规则的应用在这种情况下变得完全等同了。因此，采用 FRPS 可以被看做是对于检验决定论理论时处理误差的方式的一个非常自然的推广。实际上我们可以以如下方式来表述统计性科学与决定论科学之间的差异。在决定论科学中，定律和理论本身并不涉及任何须考虑的统计性因素，仅当这些定律和理论接受检验时才会对那些因素加以考虑。而在统计性科学中，就连定律也是具有概率性质的。

我对于所提出的概率陈述的证伪规则（FRPS）的叙述到此结束。接下来我必须说明这个规则在本章将要阐述的概率的倾向理论的那个版本中所起的作用。在频率理论中，概率与频率之间的联系是通过给概率提供一个以频率为依据的操作定义而建立起来的。在倾向理论的当前这个版本中，情况却非如此，那个联系是通过采用证伪规则而建立起来的。借助 FRPS，我们可以从概率假说中推导出关于频率的结论，而这些结论可以通过观察来核实。尤其是，从（经过适当表述的）概率公理中我们可以推导出冯·米泽斯所关注的那两个经验定律——亦即统计频率稳定性定律和随机性定律。这类似于开普勒三定律和伽利略定律从牛顿理论中被推导出来的方式。在关于牛顿力学的那种情况中，在相较于另一个质量（太阳的质量）的情况下把某个质量（某一行星的质量）忽略掉的做法使推导得以成功进行。在关于概率的情况中，推导想得以成功进行就要借助证伪规则，但这可以被视为等同于在相较于另一个概率（在分布的头部得到一个结果的概率）的情况下忽略掉某个概率（在分布的双尾得到那个结果的概率）。此处的这个类比真是相当贴切的，但这两种情况还是存在差异的，当我们在下节更为详细地察看对于概率的经验定律的推导时，我们将会看到这一点。

第三节　对概率的经验定律的推导

我们的目的在于表明，从经过适当表述的概率公理中我们如何能够借助证伪规则推导出那两个概率的经验定律。尽管要以最为一般化的形式进行推导并不困难，但是这的确需要一些数学背景知识。因此，在本节我将以一个简单的特例来给出这个推导。下节是加了星号的（或者说是有关数学方面的）一节，我将会

在倾向理论的这种版本中讨论那些公理的性质。根据这个讨论，目前这节的推导如何能得以推广将会是显而易见的。

为此，让我们来举一个简单的例子，即抛掷一枚可能具有偏向性的硬币。让我们假设各次抛掷都是独立的并且正面朝上的概率为 p。首先，我会使用我们的证伪规则去推导出适用于这种情况的统计频率稳定性定律。关于抛掷硬币的数学在 18 世纪就被研究得很透彻了，第一章的注释④对此有一个概述。在 n 次抛掷中得到 r 次正面朝上的概率由二项分布给出，即

$$Prob\text{（在 }n\text{ 次抛掷中出现 }r\text{ 次正面朝上）} = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$$

这是一个离散分布，但当 n 很大时，它趋向于一个连续分布，这种连续分布被称为正态分布或高斯分布，其公式为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

图 1.1 给出了二项分布如何趋向于正态分布的图示。当 n 为 30 时，尽管 30 对于 n 来说是一个较低的值，但正态近似的效果非常好。现在我们所要做的就是把我们的证伪规则应用于正态分布，“切掉它的双尾”，这将使我们能够得出关于频率的结论。

正如前面所给出的，该二项分布有均值 p 和标准差

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

为了方便起见，让我们考虑标准化变量

$$X = \frac{r/n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

当 $n \to \infty$ 时，X 的分布趋于具有零均值（$\mu=0$）和单位标准差（$\sigma=1$）的正态分布。如果我们将我们的证伪规则应用于具有零均值和单位标准差的正态分布，并且取 5% 的显著性水平，则该分布的双尾所对应的随机变量的值最终会被证明

是大于 +1.96 和小于 -1.96。因此，用二项分布的正态近似法，我们推断出，有 95% 的概率

$$-1.96 \leqslant X \leqslant +1.96$$

$$p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{r}{n} \leqslant p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{7.1}$$

采用我们的证伪规则就相当于把式 7.1 看做是实际上确定的，而我们的推导也就此完成了，因为式 7.1 正是统计频率稳定性定律的一种形式。它说明，当 $n \to \infty$ 时，观测频率 r/n 将趋向于一个确定值 p。此外，通过告诉我们收敛速度大约为 $1/\sqrt{n}$，它改进了关于该定律的粗略的经验陈述。

现在让我们来考虑关于一个没有偏向性的硬币的例子，对于这枚硬币，$p = 1/2$。在这种情况下，式 7.1 变成了

$$\frac{1}{2} - \frac{0.98}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{r}{n} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{0.98}{\sqrt{n}} \tag{7.2}$$

因此，如果我们在 5% 的水平上应用我们的证伪规则，我们事实上就预测了以下这方面是实际上确定的，亦即，r/n 将处于 $1/2 \pm 0.98/\sqrt{n}$ 这个区间之中，如果 r/n 的观测值处于该区间以外，就认为我们的基本假说遭到了反驳。

为了看一看这在实际中是如何应用的，我在表 7.1 中给出了一些抛掷硬币的实验的结果。第一个实验是我做的，第二个是布丰做的，而第三个和第四个都是卡尔·皮尔逊做的。在每种情况中我都给出了根据证伪规则在 5% 的显著性水平上计算出来的对于 0.5 的允许偏差，还有所观测到的正面朝上的相对频率及其与 0.5 的实际偏差。可以看到，这四个实验的结果全都认证了那个关于一枚无偏向性的硬币和各次独立抛掷的假说。这些结果清晰地表明，纵然概率并不以频率为依据来被定义，但采用一个针对概率陈述的证伪规则也能够建立起概率与观测频率之间的一种联系。

表 7.1 一些抛掷硬币的实验

实施者	抛掷次数	允许偏差	正面朝上的相对频率	相对频率与 0.5 之间的差值
吉利斯	2000	±0.022	0.487	-0.013
布丰	4040	±0.015	0.507	+0.007
卡尔·皮尔逊	12000	±0.009	0.502	+0.002
卡尔·皮尔逊	24000	±0.006	0.501	+0.001

这种情况与那种将牛顿力学和开普勒第三定律相联系的情况之间有一些很明显的相似之处。正如我们已经表明的，开普勒第三定律是通过在相较于另一个质量（太阳的质量）的情况下忽略掉某个质量（某一行星的质量）而从牛顿理论中获得的。类似地，统计频率稳定性定律是通过在相较于另一个概率（一个结果在分布的头部或者说接受域的概率）的情况下忽略掉某个概率（那个结果在分布的双尾的概率）而从概率论中获得的。此外，还存在着另一个相似的地方。我们已经给出了波普尔的看法，他认为牛顿理论表明了它自身要比开普勒第三定律更具深度，因为它在解释了它们的同时还修正了它们。尤其是，开普勒第三定律说明了所有行星都作椭圆运动，这被牛顿理论修正为以下定律：诸行星都作以受到行星间引力的相互吸引所造成的小摄动干扰的椭圆形运动。经验上的统计频率稳定性定律并没有被概率论修正，因为它是相当含糊的一个定律。它说明了当 n 很大时观测频率将趋向于一个稳定值，但是它并没有给出收敛速度，甚至没有给出对于 n 的不同数值的各种可能发散的大概限度。因此，虽然概率论没有修正该定律，但它确实使其更为精确了，而这就像我之前所论证的，是认为一个理论比它所解释的另一个理论更具深度的另一个极好的原因。正如我们已经看到的，根据概率论所作的计算告诉我们收敛速度约为 $1/\sqrt{n}$，而且它们也给出了对于 n 的不同数值的各种允许发散的大致限度。这无疑使得该定律更为精确，从而概率论表明了它自身要比它所解释的经验上的统计频率稳定性定律更具深度。因此，我们的倾向理论的版本为米勒所作的一个断言提供了辩护，当时他是这样写的："概率的倾向理论的其中一个优点就是，它给统计稳定性提供了一个更加具有几分深度的解释。"（Miller，1996：138）

刚才给出的说明克服了我们在冯·米泽斯对统计频率稳定性定律的处理中所指出的一些困难。正如我们早前（第五章第二节）所看到的，冯·米泽斯想给这个定律提供一个更为精确的陈述，但是，由于他是一个操作主义者，所以在引入概率概念之前这不得不仅仅通过经验调查来实现。然后使用一条通过从经验定律抽象而得到的公理，使概率得以定义。不过，正如我们先前（第五章第二节）

所论证的，对事件的这种排序从历史上看是不准确的，在实际上也是不可行的。统计频率稳定性定律很可能开始是作为一个粗略的经验定律出现的，但它不可能变得精确，除非引入概率这个理论概念并且大致以我们说明过的方式把这个概念与观测频率联系起来。声称不受任何理论观念引导地对抛掷硬币进行极长和极为复杂的调查就可以使该定律变得更加精确，是纯粹的幻想。我们的观点所强调的是理论与观察之间的持续的互动，它要比试图在进行完所有的观察以后才引入理论概念的操作主义策略更为简单和切实。

以上的说明也避免了冯·米泽斯所面对的关于用理论中假定的无限聚合来近似表征实际观察到的巨大的有限聚合的困难。使用我们的证伪规则，我们可以处理长度为 n 的经验聚合，其中 n 可以是2000，4040，12000，24000，甚至其他任何确切的数字。而不必说我们用抛掷结果的一个无限序列去近似表征——例如——24000 次抛掷。冯·米泽斯的支持者对此的回应可能会是，上述的推导确实也使巨大的有限的量逼近了它在无限远处的极限，可那却是它在另一点上的极限。毕竟，在推导中二项分布被它所趋向的极限即正态曲线所替代。当然，这是事实，但我会坚称，极限的这种用法是完全不成问题的。问题不在于把某个经验实在与一个假设的数学极限联系起来，而在于出于计算的目的把极限用做数学近似。这是一个纯粹的数学问题，亦即，当 n 很大时，二项分布是否会逼近正态分布以及在多大程度上逼近正态分布？我们可以在数学上估算出逼近的程度。其实在特定的情况下我们完全可以摆脱这种做法，就用一台计算机去计算出二项分布的精确数值。

现在让我们转而讨论随机性定律或者说排除赌博系统定律。在我们正在考虑的这个特殊事例中，这个定律说明，在根据一个赌博系统从原序列所选出的抛掷结果的任何子序列中观测频率仍然会逼近 p。这个定律的推导是十分容易的。假设我们借助一个赌博系统从原序列中选出一个子序列。这个子序列仍将是一个由独立的抛掷结果构成的序列，对于它，$Prob$(正面朝上) $=p$。因此，我们可以把前面所给出的数学分析应用于该子序列。如果它的长度为 n，我们可以像先前那样断定，在5%的显著性水平上，前述的式7.2将会成立，它告诉我们，子序列的观测频率将逼近概率 p，这与整个抛掷结果序列的观测频率所逼近的概率有着相同的数值。

上面的推导表明，在倾向理论中随机性概念事实上可以被归约为独立性概念，其实我们可以依据独立性将随机序列定义如下。让我们把所讨论的序列限定为由0和1构成的序列。如果一个序列是通过使某一条件集 S 重复出现而生成的，并且满足：①S 的各次重现都是独立的；②所得的结果是0或1，而且 $Prob(0)=p$，对于某个确定值 p，有 $0\leqslant p\leqslant 1$，那么，我们就会说这样的一个序列是

随机的。这个定义包括了作为退化的随机序列的 00…0…和 11…1…这样的情况。这个结论在冯·米泽斯的进路中也成立，而且是无害的。值得指出的是，与频率进路相比，该定义在数学方面变得很经济。在频率理论中，随机序列是由相对于一组赌博系统的极限频率不变性来定义的。然而，当涉及要对聚合的组合（combination of collectives）作出考虑时，冯·米泽斯就不得不定义和使用独立聚合这一概念了。因此，他引入了两个概念“随机性”和“独立性”，它们是以相当不同的方式被定义的，尽管很显然这两个概念其实是同一个概念。这个事实在上面的定义中已经得到表明，那个定义实际上是把随机性概念归约为独立性概念，从而简化了数学上的详细论述。

但赌博系统现在在这个理论中究竟是起什么作用呢？答案很简单。它们可被用来获得关于独立性的检验。我若干年前所实施的一个简单实验的结果可以作为例证说明这一点。它包括了抛掷一枚旧的一便士硬币 2000 次并记下所获得的由正面朝上和反面朝上的结果构成的序列。相关的假说是：各次抛掷都是独立的并且 *Prob*(正面朝上) = 1/2。正如在表 7.1 中所指出的，在 2000 次抛掷中正面朝上的观测频率为 0.487，它与 0.5 的差量（即 -0.013）是在证伪规则在 5% 的显著性水平上所允许的偏差 ±0.022 之内的。这个观察可以被视为特别针对该硬币是无偏向性的这一假定的一个检验。然而，理想的做法想必是，还应该靠其他更为专门地针对各次抛掷都是独立的这一假定的检验来作为这个检验的补充。现在要得到关于独立性的检验可以使用一个赌博系统从由 2000 次抛掷结果构成的原序列中选出某个子序列，进而核实正面朝上在这个子序列中的相对频率是否仍然满足前述式 7.2 中所给出的关系。要用到的赌博系统总共有 10 个。首先，每隔一个抛掷结果选取一次 [$g(2)$]。这个系统可以以第一次抛掷作为起点 [$g(21)$]，也可以以第二次抛掷作为起点 [$g(22)$]。然后，每隔三个抛掷结果选取一次。这里以类似的方式给出了四个赌博系统 $g(41)$，$g(42)$，$g(43)$ 以及 $g(44)$。接下来，请记下以下序列，$g(AH)$ [代表 g(After Head)]、$g(AT)$、$g(AHH)$ 以及 $g(ATT)$，它们分别由紧随单独一次正面朝上、单独一次反面朝上、两次正面朝上或两次反面朝上之后出现的那些结果所构成。对于每一个赌博系统，我们依次记录相应子序列的项数、式 7.2 所允许的相对频率与 0.5 的偏差、所观测到的正面朝上的相对频率，以及所观测到的正面朝上的相对频率与 0.5 之间的差值。如果所观测到的差量是在允许偏差的范围内，该假说就被认证了；否则，它就被证伪了。

表 7.2 一个抛掷硬币实验中的赌博系统

赌博系统	观察次数	允许偏差	正面朝上的相对频率	相对频率与 0.5 之间的差值
无	2000	±0.022	0.487	-0.013
$g(21)$	1000	±0.031	0.470	-0.030
$g(22)$	1000	±0.031	0.504	+0.004
$g(41)$	500	±0.044	0.488	-0.012
$g(42)$	500	±0.044	0.510	+0.010
$g(43)$	500	±0.044	0.452	-0.048*
$g(44)$	500	±0.044	0.498	-0.002
$g(AH)$	974	±0.031	0.505	+0.005
$g(AT)$	1025	±0.031	0.470	-0.030
$g(AHH)$	487	±0.044	0.503	+0.003
$g(ATT)$	542	±0.042	0.482	-0.018

* 唯一的证伪性结果。

细察表 7.2，我们看到，11 个检验中有 10 个认证了那个假说，但其中有一个［$g(43)$，在表 7.2 中用星号标出］却给出了证伪性的结果。允许偏差是 ±0.044，而其实际偏差是 -0.048，刚好在区间之外。在这种情况下，我们应该怎样看待整体结果呢？在这一点上，值得关注一下 FRPS 的一个独特的特征。假设我们取用一个 5% 的显著性水平。这意味着，如果我们让一个真的统计假说经受一连串的检验，我们应该预料到在 20 个检验中大约会有一个给出错误的证伪性结果。由此可见，对我们的证伪规则的使用必须要有一定的“审慎性”。如果一个特定的检验导致了证伪性的结果，我们不可以就此不假思索地假定那个假说应该被看做遭到了反驳。在某些场合中，得出这样一个结论会是合理的，但在别的场合中，整体图景可能并非如此。在当前的事例中，那个证伪性检验是一组 11 个检验中的一个，而其他检验全都给出了认证性的结果。现在正处于这样一种情况：如果假说的确是真的，我们预料在所做的 20 个检验中有一个会给出错误的证伪性结果。此外，观测结果也仅仅是刚好在允许区间之外。其实，在大约 2.8% 或更低一点的显著性水平上，那个检验是会给出一个认证性结果的。把所有这些须考虑的因素都综合起来以后，结论就自然是，那些检验在整体上对基本假说——即该硬币是无偏向性的并且各次抛掷都是独立的——给予了认证。

然而，可能有反对意见认为：需要“以一种审慎的方式”来使用我们的证

伪规则会在相当大的程度上贬损它的吸引力。我待会儿就将给出另一个关于这个规则的这样一种审慎用法的例子，然后我将一般性地讨论对这种审慎性的需要所导致的问题。不过，目前我想要指出的是，这里的情况与在科学的非统计性分支中所出现的情况有一些相似之处。单独一次科学检验的结果几乎从来都不是结论性的。在物理学中，单独一次检验有可能显示出一个从来不曾出现在该检验随后的重复实施中的“孤立的结果”。关于这方面的一个著名的例子就是米勒（D. C. Miller）在迈克尔逊－莫雷实验（Michelson-Morley experiment）中所获得的肯定性结果。因为更多的人在重复该实验后依然给出最初的否定性结果，所以可以断定，米勒的结果必定是由某些原因未明的差错所导致的，尽管该问题从未得以彻底澄清。

大体说来，如果我们怀疑自己正在探讨的是一个孤立的结果，我们总是可以做的就是重复那个检验若干次。如果那个现象未曾重现，我们就会把它仅仅视作一件怪事而不加理会。按照同样的方式，如果我们怀疑 FRPS 的一次特定的运用给出了错误的证伪性结果，我们总是可以做的就是进行一连串的统计检验。如果它们中只有一个给出了位于允许区间以外不远处的一个证伪性的结果，并且如果其他实验的结果全都是认证性的结果，那么我们就可以把整体结果看做一个认证性的结果。现在我将给出另一个关于这个证伪规则的这样一种审慎用法的例子。它是关于随机数的实际生成的。

上面所给出的以独立性为依据的关于随机性的定义的另一个优点是，它与随机数的实际生成方式符合得非常好。关于这种生成程序的一个例子是由肯德尔（M. G. Kendall）和巴宾顿－史密斯（B. Babington-Smith）的随机抽样数表（tables of random sampling numbers）（Kendall and Babington-Smith，1939b）提供的。这两位著述者使用了一种经过改进的轮盘。它由一个圆盘构成，这个圆盘被分出了十格标有 0，1，…，9 的相等区域，并由一个电动机驱动旋转。该圆盘不时地被照亮，由此会产生一种它看起来像是静止不动的效果，这时紧靠着一根固定指针的那个数就会被记下来（欲了解关于这个随机数产生机器的更详尽的描述，请参见 Kendall and Babington-Smith，1939a：51－53）。使用这个机器收集到了一个由 100000 个数字构成的序列，这个序列连同它的某些子序列接下来要经受四种不同的统计检验。

有一类检验可以被看做主要是关于独立性的检验，尽管它并不是——至少在任何直接的意义上不是——立足于一个赌博系统的。虽然通过赌博系统可以获得关于独立性的检验，但并非所有关于独立性的检验都需要立足于赌博系统。肯德尔和巴宾顿·史密斯对这类检验描述如下：“算一算前后两个零之间的间隔的各种长度，进而汇总出一个频率分布，拿它来跟期望相比较。这种检验被称为间隔

检验（gap test）。”（Kendall and Babington-Smith，1939b：viii）

还有另一种检验为肯德尔和巴宾顿－史密斯所用，这是一种简单的频率检验，旨在用某个子序列中所观测到的相对频率与它们的期望值（即1/10）相比较。整个序列首先被整理为100组，每组1000个数字，接着被整理为20组，每组5000个数字，最后被整理为4组，每组25000个数字。这些检验的其中三种被应用于每一个由1000个数字构成的组别，全部四种检验则被应用于其余的组别和整个序列。在这400个检验中只有6个失败的结果。有4个由1000个数字构成的组别未能通过那些检验中的1个，有1个未能通过其中的2个。然而，纵使如此，观测频率与期望的离散也不是非常大。

这些失败的结果并没有促使肯德尔和巴宾顿－史密斯拒斥那个关于随机性的假说。相反，他们以一种审慎的方式不明言地使用了证伪规则，并论证表明，从统计检验的本质来看，在这么大量的检验中存在着一些失败的结果是很有可能的。几乎所有的证据都支持随机性假定，因而反常可以被视作孤立的结果而不予考虑。这个推理看来完全是合理的，而且与我们之前的讨论也是一致的。肯德尔和巴宾顿－史密斯还补充说，那些未能通过至少一个检验的由1000个数字构成的组别大概是十分不适合在实际的场合使用的。待会儿我将回过头来讨论这一点。兰德公司（Rand Corporation）在1955年出版了《百万随机数字》(*A Million Random Digits*)。虽然他们用于获取这些数字的实际方法是不一样的，但基本原理依然是相同的。在兰德公司方面，实验的物理基础是某些电路中的电子的随机发射。

请注意，有意思的是，在所提及的这两方中，在消除偏向性和相依性方面都存在着相当大的实际困难。让我们先来考虑肯德尔和巴宾顿－史密斯方面的情况。他们除了自己本人记录机器的读数外，还让一名助手记录某些读数。正如我早已谈到的，他们发现他们本人的读数满足几乎所有对于随机性的检验。然而，那名助手的读数却显示出偶数的频率要比奇数的频率显著地高。肯德尔和巴宾顿－史密斯断定，他肯定对偶数有一种强烈的无意识的偏爱，而这导致他看错了结果。兰德公司则陷入了不一样的困境。为了利用电子的随机发射，必然要放大信号。可是放大电路具有一定的“记忆”，这往往容易引入相依性，即使潜在的发射是真正独立的。这些例子极具启发性而且也是令人鼓舞的，因为它们表明了我们的统计检验真的能使我们查出偏向性和相依性，以便让我们可以消除它们。

现在是适当的时候来说一说随机数实际被运用时所引起的一个困难了。假设我们有一个数字序列，在根据前面的定义的意义上它是随机的，亦即它是由一个其结果为0，1，…，9且有相等概率的实验的诸次独立的重复实施生成的。如果该序列足够长的话，那么，得到一个——比方说——由100个前后相继的0构成

的子序列将存在着一个非常高的概率。其实，整个序列是经受不住若干个关于随机性的检验的，除非有这样一个子序列出现。但是现在假设我们正在实际地使用随机数，比方说要用它们来获得一个容量为 100 的随机样本。那个由 100 个前后相继的 0 构成的子序列将是极不适合的。换句话说，一个随机数序列可能在实际上是不适用的。肯德尔和巴宾顿 - 史密斯把适合于实际用途的随机数序列称为随机抽样数集合。他们当时提出了这样的看法："因此，一个随机抽样数集合……除了要经过随机选择还必须符合某些要求。"(Kendall and Babington-Smith，1938：153）现在的问题是：这些另外的要求是什么呢？我们先前的讨论间接提出了一个符合肯德尔和巴宾顿 - 史密斯本人的意见的简单回答。

早已被着重指出的是，统计检验总是具有暂定性，而且总是有可能根据随后的证据把明显的证伪性结果作为"孤立的结果"而加以拒斥。这样的话，完全有可能存在着一个实际上是随机的但不能通过关于随机性的一些标准检验的序列。刚才谈到的 100 个前后相继的 0 就是这种序列的一个例子。因此，要求一个序列不仅应该是随机的还应该满足某些对于随机性的标准检验是明智的做法。我敢断言这样一些序列是最适合于实际用途的序列。

到目前为止，我已经审视了通过抛掷硬币和使用经过改进的轮盘所获得的一些经验结果。事实上是存在着大量通过使用硬币、骰子、轮盘以及类似的装置而获得的这类经验证据的。凯恩斯（Keynes，1921：361 -366）对历史上具有这种特征的一些实验给予了概述，而艾弗森（G. R. Iverson）等人（Iverson *et al.*，1971）则给出了近期一个引人瞩目的实验的结果，这个实验进行了超过 400 万次的掷骰子。这些各种各样的实验的结果与我们已经较为详尽地讨论的那些结果或多或少是一致的。对这些结果的研究既揭示出了骰子方面的偏向性，也揭示出了观察者方面的偏向性，他们有时候会对某些数字而非其他数字有无意识的偏爱。对证伪规则的审慎使用通常是有必要的。然而，一旦我们忽略掉这两点，那些经验证据就会对标准的概率模型给予非常强的认证。这对"概率论是一门科学"这一论题而言是一个极好的例证。标准的概率模型对于什么频率应该被观察到给予了相当精准的预测，而且据我所能看到的，没有任何先验的或逻辑的原因让观察资料应该符合这些预测。例如，即使向着一个确定值的收敛被观察到了，那为什么这个收敛就应该以 $1/\sqrt{n}$ 的速度进行呢？可是收敛确实是以这种速度进行的，这认证了概率论的基本原理。

到目前为止我也已经强调了概率论与其他诸如牛顿力学等数理科学之间的相似之处。现在是指出这一点的时候了，即这些相似之处并不是全然吻合的，而且它们之间也存在着不相似的地方。例如，在证伪规则的应用（相较于一个结果在分布的头部的概率把那个结果在分布的双尾的概率忽略掉）与（相较于太阳

的质量把某一行星的质量忽略掉）从牛顿理论导出开普勒第三定律的方式之间有相似之处。然而，这个相似之处远远不是全然吻合的。在关于牛顿力学的情况中，先要考虑（太阳、火星等的）具体的质量，然后才作出关于它们的相对数量级的判断。这种推导方式应用在别的场合就会考虑不同的质量，作出不同的估计。相比之下，每当概率假说与频率数据相比较的时候，证伪规则都必须以千篇一律的方式被运用。因此，我是在某种程度上同意德·菲耐蒂的一段富有洞察力的文字的，在这段文字中他表明概率论与其他自然科学之间是存在着一处差异的。这段文字（已经在第五章第三节引用过）如下：

> 常常有人认为，只要注意到那种使概率和频率之间的关系变得精确的不可能性相似于在所有实验科学中遇到的将理论的抽象概念与经验实在确切地联系起来的实践上的不可能性，就可以避开这些批评意见。这种相似性在我看来是虚幻的：在其他各门科学中，人们所拥有的是这样一种理论，它可以确定地和准确地断言与预测将会有什么事情发生，如果理论是完全准确的话；在概率演算中，正是这种理论本身迫使我们承认所有频率的可能性。在其他各门科学中，不确定性其实是来自于理论与事实之间的不完善的联系；在我们的情况中，恰恰相反，它并非源于这种联系，而是源于理论本身的主体部分……
>
> （de Finetti，1937：117）

概率陈述的证伪规则并不是一次特定的应用所需要的一个具体假定，而是所有的应用都需要的一个一般假定。我们可以以这种方式来察看这个问题。假设一门非统计性的数理科学是以一组公理为基础的。如果我们可以从这些公理推导出大量与观察相符合的结果，它们便得到了辩护。然而，在概率论方面，我们不得不采用一组公理和一个证伪规则。正是从这个作为一个整体的系统（比方说Σ）我们才可以推导出那些与观察相符合的结果，例如概率的经验定律。因此，Σ在经验上和实践上的成功给包括证伪规则在内的这个整体提供了辩护。

但是这里出现了另一个问题。假设对于我们的 FRPS，显著性水平被设定为 $k\%$。于是我们可以从Σ推断出，在 FRPS 被应用于一些真实的统计假说的情况下，有大约 $k\%$ 的可能性它会导致对于这样一个假说的错误证伪。换句话说，如果我们依靠 FRPS 是正确的，那我们认为在某些特定的情况下有 $k\%$ 的可能性它会给出错误的答案也是正确的。因此，我们是不能够一致地采用 FRPS 的。这个规则不可避免地会导致不一致性。我们可以把这种状况概括为，FRPS 在实践上和经验上是成功的但却是不一致的。

这种不一致性应该是一种警醒，它让我们要多加注意，要审慎地对待我们的证伪规则，但依我看，这对整个进路并不是致命的。毕竟，每当我们把数学理论应用于现实的情境时，总是存在着许多可能的误差来源，而 FRPS 中的不一致性只不过让误差来源的数目再增加一个罢了。正如统计实践所表明的，这个追加的误差来源是我们可以学会容忍的东西。

第四节　柯尔莫哥洛夫公理与倾向理论*

我们已经在概率的主观解释和频率解释的语境中对柯尔莫哥洛夫公理作了考察。这两种解释都给出了一个关于概率的显定义，因而必然要依据这个定义去证明柯尔莫哥洛夫公理成立。这我们都是能够做到的，除了频率理论中存在关于可列可加性的问题以外。在概率的倾向解释的语境中对于柯尔莫哥洛夫公理的辩护则是相当不一样的。倾向理论（在本章所给出的版本中）并没有提出一个可用以推导出那些公理的关于概率的显定义。相反，它认为概率是由一组公理来隐式地刻画的，这些公理是为了给被观察到的随机现象提供一个数学理论而被设计出来的。通过表明从这些公理能推导出与观察一致的结果，这些公理便得到了辩护。尤其是，通过表明我们能从柯尔莫哥洛夫公理推导出那两个概率的经验定律——统计频率稳定性定律和随机性定律——就可以使柯尔莫哥洛夫公理得到辩护。在关于一个有偏向性的硬币的简单特例中，我们已经实施了这种推导。现在让我们来看看当柯尔莫哥洛夫公理以其最一般的形式被考察时情况又是怎样的。

对柯尔莫哥洛夫公理的表述通常是以**概率空间**(probability space）这一概念为依据的。概率空间被定义为一个有序三元组（Ω，F，P），其中 Ω 为**样本空间**或**属性空间**，F 是 Ω 的子集的一个**博雷尔域**(Borel field)，P 是一个被定义在 F 上的实值函数。柯尔莫哥洛夫公理此刻能被概括为一个单独的公理（公理Ⅰ），这个公理可以被陈述如下：

公理Ⅰ(柯尔莫哥洛夫公理)：P 是 F 上的一个非负的、可列可加的集函数，并且满足 $P(\Omega)=1$。

这里还需要给这条公理添加一个条件概率的定义。作为一种选择，条件概率也可以被视为一个初始概念，由另一条公理来刻画。为了将这些公理与观察领域连结起来，我们当然必须增加一条证伪规则（FRPS)，但结果证明这是不足够的。就算有柯尔莫哥洛夫公理，再加一个 FRPS，我们事实上也不能推导出那两条概率的经验定律，因为还需要别的东西。接下来我将论证表明所需要的是另一条公理

——公理Ⅱ，除了上述的公理Ⅰ，这一公理有待被添加进来。这条公理Ⅱ将被称为**独立重复公理**(Axiom of Independent Repetitions)。乍看起来，这可能像是一个颇为奇特的提议，但我将表明，这条额外的公理恰恰就是柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov，1933：Chapter Ⅰ，§2）在其专著的某一节中所提出的各种非正式建议的一个清楚明确的正式表述，他在那一节讨论的是他的理论与实验数据的关系。

正如我们已经看到的（第六章第一节），尽管柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov，1933：3）在一个脚注中宣称使用了冯·米泽斯的工作成果，但他的进路实际上是更接近于倾向理论的进路的。因此，他是把概率与可重复条件集（S）的结果而非冯·米泽斯那种类型的聚合（C）联系起来的。倾向理论主张，某些可重复条件集有一种在长重复事例序列中产生近似地等于概率的频率的倾向。柯尔莫哥洛夫给出了实际上是等同于对倾向理论的这个基本原理的一种正规刻画的表述。他说道：

> 如果条件的复合体 S 重复出现的次数是一个大数 n，那么，若 m 为事件 A 的发生次数，则人们实际上可以肯定，比率 m/n 与 $P(\mathrm{A})$之间的差别十分细微。
>
> （Kolmogorov，1933：4）

这条原理把概率 $P(\mathrm{A})$与在重复基本条件 S 大数次的情况下所获得的频率联系了起来。要在常规的概率空间的框架内正式确立这样一条原理其实是不可能的，因为概率空间并没有提及可重复条件 S。为了克服这个困难，我建议我们引入**概率系统**（probability system）这一概念，并将其定义为一个有序四元组（S，Ω，F，P），其中（Ω，F，P）是前面所给出的一个常规意义上的概率空间，而 Ω 则是可重复条件 S 的可能结果集。我将以此作为倾向理论的一个基本前提：如果（S，Ω，F，P）是任一概率系统并且 $A \in F$ 是任一事件，那么，若条件 S 重复出现的次数是一个大数 n 并且 A 发生了 $m(\mathrm{A})$ 次，则实际上肯定有

$$\frac{m(\mathrm{A})}{n} \approx P(\mathrm{A}) \tag{7.3}$$

在适当的时候使用证伪规则自然会使“实际上肯定”和“≈”的意义变得更为精确。然而，我会把式 7.3 视为一个处于倾向理论核心的非形式化原理。它是被柯尔莫哥洛夫和波普尔的倾向理论的早期版本所主张的，而它本身其实也得到了常识的极力认可。不管怎样，我在下文中将假定式 7.3 为真。也许令人惊讶的

是，最终表明，它有某些重要的结果。

在我们能够得出这些结果之前，对可重复性这个概念进行比我们至今所做的更为详尽的分析将是很有必要的。让我们从显而易见的一点着手，即任何两次所谓的重复出现经过仔细检查都会被发现在很多方面是不一样的。例如，请考虑一枚硬币的两次抛掷，它们通常都会被认为是重复事例。可能仔细的检查会揭示出，在其中一次抛掷前，硬币是正面朝上的，而在另一次抛掷前，硬币是反面朝上的。此外，即使抛掷程序的每一宏观性质在两种情况中看起来都是一样的，差异仍然是存在的，那就是，两次抛掷发生在不同的时刻。因此，如果两个事件在得到详细规定的一系列方面是相同的，我们就应该认为它们是重复事例，而不是由于它们在各个方面都是相同的（这也是不可能的）。两个事件就其本身而言并不具有重复关系。关于它们是否如此的问题取决于我们想要如何描述它们。任何两个事件，无论多么相似，都会在某些方面有差异，而这可能会妨碍它们被看做是重复事例。另一方面，任何两个事件，无论多么不相似，总会在某些方面是一致的，而这又可能会导致它们被视为重复事例。事实上，一个序列是一个重复事例序列仅仅是相对于某个共同的性质或条件的集合而言的。这些考量使以下定义得以浮现。一个序列相对于一个条件或性质的集合 S 是一个重复事例序列，仅当该序列的每一个元素都满足 S 的每个条件，而**不考虑各个元素在其他方面有怎样的差异**。这个定义就其本身而言还算可以，但根据另一方面的情况去对它作出修正也将会是适宜的。

对于任何一个重复事例序列而言，很有代表性的地方在于，在这样的序列中不仅存在着一组恒定特征，而且还存在着某个可变特征。通常这个可变参数是时间，正如在一个由一枚硬币的各次抛掷所构成的序列中所体现的那种情况，但也不必就是时间。例如，请考虑有 20 个学生正在相同的时间做“相同的”实验。在这里可变参数是空间位置。再者，可变参数还可以同时包含空间上的和时间上的约束。这便导致了以下的困难。请考虑那 20 个学生的例子，假设他们正在进行一项电学实验。即使某组界定性条件得到满足，但如果除此之外，那些仪器靠得非常近以至于产生了某种磁干扰，我们可能就不想把这样一些实验看做重复事例了。我们事实上会要求那些实验应该在位置上被隔开得足够远。类似地，对于时间来说，我们可能希望各个事件在时间上被隔开得足够长。当然了，我们可以把这种情形看做已包含在了相关的条件集 S 中，但我认为最好还是将它分开处理，为此，可以引入**间隔条件**（spacing condition）这一概念。我们从现在开始将要求任何重复事例序列必须包含一个间隔条件 s，用以声明该序列中的各项相对于某个可变参数（例如，时间、空间位置或两者的结合）必须以这样或那样的方式被分隔开来。

通过用间隔条件这个概念去分析波普尔的一个有趣的例子，我们可以借此来阐明它的价值。波普尔所考虑的是处于特定年纪的某个人再多活一年或二十多年的概率，他论证表明这并不是仅仅随着那个人的健康状况的变化而变化的。正如他所说：

> 然而，那种把继续存活的倾向视为健康状况的一个特性而非情境的一个特性的观点可以很容易地就被表明是一个严重的错误。作为理所当然的事，健康状况是非常重要的——情境的一个重要方面。但因为任何人都可能会患病或牵涉进一起事故，所以医学的进步——比方说，强效新药的发明（如抗生素）——改变了每个人继续存活的前景，无论他或她是否实际上身陷于不得不服用任何这样的药物的处境。情境改变了可能性，由此也改变了倾向。
>
> （Popper，1990：14－15）

我们可以这样来应对波普尔在此处的论点，那就是要表明：当我们正在考虑那个关于活到某一年岁的概率时，我们应该把我们的可重复条件集 S 看成是对一种具体的健康状况的界定，并把间隔条件 s 看成是对重复事例的构成方式的声明，即重复事例应该是由在特定时期具有那种健康状况的处于正被讨论的那个年纪的人所构成的，而不是由在不同时期具有那种健康状况的这类人所构成的。这为波普尔的例子提供了一个满意的说明，而无须把倾向指派给不可重复的宇宙状态。

我们现在可以把我们关于“重复事例序列”的定义重新表述如下。一个事件序列相对于包含了一个间隔条件 s 的某一条件集 S_s 是一个重复事例序列，仅当所有条件 S 被每个事件满足，并且那些事件按 s 的要求被分隔开来。一个条件集 S_s 是可重复的，仅当一个无确切长度的重复事例序列相对于 S_s 在原则上是可能存在的。

给出上面的分析的目的在于，它使我们能够提出并回答以下重要问题：可重复性是否蕴涵独立性？事实上很容易就能表明可重复性并不蕴涵独立性，因为我们可以给出其结果都是相依的一些可重复条件集的例证。其实，几乎任何关于某一马尔可夫链的例子都将适合用做这类例证。因此，我们可以再次考察前面（第四章第六节）所给出的两个关于马尔可夫链的例子。它们是“红或蓝”游戏和由特拉维夫雨季期间干燥的日子及有雨的日子所构成的序列。

在“红或蓝”游戏方面，条件集 S 明确规定：有一枚匀称的硬币被抛掷，如果结果是正面朝上，得分就加 1，若是反面朝上，得分就减 1；如果所得出的分数大于或等于 0，该结果就被指定为“蓝”，若是小于 0，该结果就被指定为

“红”。间隔条件 s 是：要被考虑的是该游戏前后相继的每一轮。这个可重复条件集 S_s 是符合刚才所给出的分析的，不过那些出现在一个重复事例序列中的结果显然是相依的。在另一个例子中，条件集 S 明确规定：我们要观察特拉维夫在特定的一天是否有雨，如果有降雨，就把结果记录为“有雨的”，否则记录为“干燥的”。间隔条件 s 明确规定了我们要考虑的是雨季（12 月、1 月与 2 月）期间前后相继的每一天。条件集 S_s 同样又是一个真实的可重复条件集，但那些结果却是相依的。对于特定的一天而言，那天将会是干燥的日子在前一天干燥的条件下（概率为 0.75）要比在前一天多雨的条件下（概率为 0.34）具有更大的可能性。

这样一来，承认可重复性并不蕴涵独立性使得至少两种不同的方法成为可能。其中的第一种就是，为可重复条件集 S_s 的结果引入概率，不考虑这些条件的重现是不是独立的。第二种可供选择的方法就是，只把概率赋予其重现具有独立性的那些可重复条件集 S_s 的结果。现在我将论证支持这两种方法的第二种。

假设我们采纳了第一种方法，并准备对可重复条件集 S_s 的结果赋予概率，甚至在这些条件的重现具有相依性的场合中也愿意这样做。尤其是，我们有意引入概率 $Prob(红 \mid S_s)$ 和 $Prob(蓝 \mid S_s)$，其中 S_s 是那些界定“红或蓝”游戏的条件集。假设我们对那个游戏进行了设定，使得“红”和“蓝”正好是对称的，那么，可推测，我们在这种情况下会有 $Prob(红 \mid S_s) = Prob(蓝 \mid S_s) = 1/2$。但是现在让我们来回顾一下之前（第四章第六节）引述自费勒（Feller，1950：82－83）的“红或蓝”游戏的古怪特征。费勒表明，如果该游戏在一年中每隔一秒就进行一次，亦即重复进行了 31536000 次，则我们会有 70% 的可能性得到以下的结果：出现得较为频繁的那种颜色总共出现了 265.35 天，即约占这段日子的 73%，而出现得不那么频繁的那种颜色仅仅出现了 99.65 天，即约占这段日子的 27%。这清楚地表明，式 7.3 对于“红或蓝”游戏是不成立的。这个等式宣称：对于大数次（n）的重复，实际上肯定的是，某一属性 A 被观测到的相对频率 $[m(A)/n]$ 将近似地等同于它的概率 $[P(A)]$。31536000 无疑是一个非常大的重复次数了，不过，对于“红或蓝”游戏被重复实施了这个次数的那些事例，在其中的 70% 中，每个属性的观测频率都会与它的概率（0.5）相差 0.23，亦即几乎是最大的可能发散的一半。

我已经论证表明，式 7.3 是倾向理论的核心，它在直觉上是高度似真的。然而，如果我们允许把概率赋予其重现具有相依性的那些可重复条件的结果，那么式 7.3 极有可能会失灵。因此，我建议，如果可重复条件的重现是相依的，那我们就不应该在这种状况下确定概率的值。依我看，按照这种思路来发展一个理论其实会有很高的风险。因为，它差不多是自动地把概率近似地等同于一个长重复

事例序列中的频率，而这样的一种等同有时候完全是错误的，所以一个包含了这样的等同的理论是非常容易将人引入歧途的。因此，我的结论是，我们应该只把概率指派给其重现具有独立性的那些可重复条件集的结果。这相当于一个新的假定，我将称之为**独立重复公理**(Axiom of Independent Repetitions)。它可以被表述如下。

请考虑一个由 S_t 的重现所构成的序列。假设我们从这些重复事例中选出一个特定的 n 元组，比方说（i_1，i_2，…，i_n）。这个步骤可以一再地反复进行。每一次我们都形成一个由 S_t 的重现所构成的序列，然后从这些重复事例中选出相同的 n 元组。因此，该步骤本身就是一个可重复条件集，我们将把它记为 S_t^n。假设我们现在以一个概率系统（S_t，Ω，F，P）为起点。令 Ω^n 表示 Ω 的 n 重笛卡尔积。令 F^n 为 Ω^n 的子集的一个博雷尔域，它被定义如下：我们考虑所有笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$（每个 $A_i \in F$）的集合（比方说 S），并使 F^n 作为包含 F 的最小博雷尔域。我们已经把柯尔莫哥洛夫公理概括为了公理Ⅰ，现在我们可以把我们的新公理陈述为公理Ⅱ，

公理Ⅱ（独立重复公理）：如果（S_t，Ω，F，P）是一个概率系统，那么，对于任何 n，（S_t^n，Ω^n，F^n，$P^{(n)}$）亦然，其中 F^n 上的测度 $P^{(n)}$ 是 F 上的测度 P 的 n 重积测度。

依据公理Ⅰ和公理Ⅱ，当然还要再加上概率陈述的证伪规则，就能够推导出那两条概率的经验定律。这种推导与那种以有偏向性的硬币为例所作的推导仍旧是一样的，在那个例子中，我们假定各次抛掷都是独立的，这是符合我们的独立重复公理的。这两条经验定律得到了大量数据的认证，因此，对它们的推导也为我们采纳公理Ⅰ和公理Ⅱ，实际上还有 FRPS 作出了辩护。这就是在倾向理论的框架内对柯尔莫哥洛夫公理（公理Ⅰ）的辩护。

请注意，这里并不存在与可列可加性有关的困难，可列可加性在其他一些概率解释中竟引起了那么多的问题。这两条公理就是为了解释关于随机现象的观察资料而设立的。我们都希望得到能解释那些观察资料的最为简单的数学理论，而从数学的角度来看，可列可加性要比有限可加性简单，并且它能十分令人满意地进行解释工作，所以我们采纳它是得到了相当有力的辩护的。因此，可列可加性便得到了倾向理论的辩护，而冯·米泽斯仅仅是被迫对可列可加性作出假定，不能为这条追加的公理提供一种经验辩护（见于第五章第五节）。这就是支持倾向理论的一个理由，因为可列可加性远比有限可加性便利，而且它其实在实际中被几乎所有从事概率论研究的数学家所使用。

我将对独立重复公理作一些评论，以此结束这一节和这一章的论述。首先，有必要回应一个可能会针对这条公理而提出的反对意见。人们有可能认为该公理把概率论限定于处理具有独立性的特例，而概率论是既要探讨独立的事件，也要探讨相依的事件（例如马尔可夫链）的。然而，这个论点是错误的，因为在一个包含了独立重复公理的框架内是完全可以——实际上直接地——处理马尔可夫链和其他涉及相依的事件的情况的。我们可以通过再次考虑我们那两个关于马尔可夫链的例子来表明这一点。总的思路是，我们要这样处理马尔可夫链，即把构成链条的那些结果的一个完整的序列视作属性空间 Ω 中的一个单独的点，从而使得，可重复条件就是那些把该链条作为一个整体来界定的条件，独立的重复事例就是整个链条的各次独立的实现。因此，在“红或蓝”游戏中，我们的重复事例就是全都以同一个起始位置作为出发点的各个不同的游戏。这些不同的游戏是相当独立的，即使组成每个游戏的各轮都是高度相依的。这样，独立重复公理便得到了满足。类似地，在那个关于特拉维夫的例子中，重复事例可以是前后相继的各年的雨季期间所观察到的干燥的日子和有雨的日子的序列。这些序列很可能是独立的，即使在任何给定的序列中前后相继的每一天的结果是高度相依的。通过这种方式，独立重复公理就会得到满足。

这就回应了可能会针对独立重复公理而提出的一个反对意见。现在让我们来考虑一些支持它的理由。首先，它使我们能够解决我们在冯·米泽斯的理论的语境中检视柯尔莫哥洛夫公理时所发现的一个问题（见于第五章第五节）。所有的柯尔莫哥洛夫公理看来只对应于冯·米泽斯的两条公理的第一条（收敛性公理），在柯尔莫哥洛夫公理中没有对应于随机性公理的部分。独立重复公理弥补了柯尔莫哥洛夫论述上的欠缺之处，提供了对应于冯·米泽斯的随机性公理的内容。其实我们已经尝试去强调这种对应性了，那就是，把我们的公理表述为两条（公理Ⅰ和公理Ⅱ），它们对应于冯·米泽斯的两条公理。独立重复公理（公理Ⅱ）与冯·米泽斯的随机性公理之间的联系符合我们的看法，即冯·米泽斯的随机性概念在倾向理论的框架内被归约为了独立性概念（见于前面的第三节）。

接下来让我们考虑在冯·米泽斯的理论框架内所产生的另一个问题，我们之前（第五章第一节）也曾谈到过它。一个数学聚合是由一个有序序列构成的，序列的每一项都编上了 1，2，…这样的号码。然而，经验聚合中有好多例子并非天然地有序的。比如说，一块地里的植物或者一种气体中的分子都不会出现在一个特定的序列之中。用有序序列去表征这样一类无序的经验聚合是否合法呢？

当然了，在倾向理论中，我们已经用可重复条件集 S 替代了聚合。然而，从根本上讲，同样的问题仍然会出现，因为可以认定，只要 S 重复出现，我们马上就能得到一个有序序列：第一次重现、第二次重现，依此类推。但是，对于

不存在天然次序的例子，那又怎么样呢？在目前的框架下，这些例子会出现在S_t中的间隔参数s实际上是与空间距离有关的场合。请考虑这个关于一团气体的分子在一个特定的时刻t的例子。我们的可重复条件明确规定：我们必须挑选一个特定的分子（相关结果可以是它在t的瞬时速度）。条件的重现是通过选取不同的（即空间上不同的）分子来实现的。显然，那些分子之间是不存在天然的排序的，而为了得到我们的重复事例的有序序列，我们就必须任意地强行给它们排序。这可能看起来是一个令人生疑的程序，但是，只要独立重复公理成立，它很容易就能被表明是合法的。既然所观察到的东西是相互独立的，那我们给它们编排什么次序都是无关紧要的。如果规定一个特定的次序在数学上是便利的话，我们是完全有权这样做的。

柯尔莫哥洛夫作出了以下这段非常有意思的评述（我在一处地方改动了他的符号，以便与我们的相一致）：

> 从数学的观点看，概率论可以被视为关于可加集函数的一般理论的一种特殊应用。概率论已发展成为拥有自己的方法的一门范围广阔的独立的科学，对此，人们自然会问这是如何发生的呢？
>
> 为了回答这个问题，我们必须指明当可加集函数理论中的一般性问题在概率论中被提出时所经历的特殊化。
>
> 我们的可加集函数$P(A)$是非负的并且满足条件$P(\Omega)=1$，这个事实就其本身而言并不会导致新的困难。从数学的观点看，随机变量……仅仅表征关于$P(A)$可测的函数，而它们的数学期望则是抽象的勒贝格（V. A. Lebesgue）积分。[这种类比是最先在弗雷谢（M. Fréchet）的著作中得到充分说明的。] 因此，只是引入上述的那些概念将不足以为一个范围广阔的新理论的发展提供一个基础。
>
> 从历史上看，实验和随机变量的独立性所表征的正是那个给概率论戳上其特有印记的数学概念……
>
> 可见，在独立性概念中，我们看到的至少是概率论中所特有的那种类型的问题的萌芽。
>
> （Kolmogorov，1933：8－9）

但是，如果独立性是使概率论区别于其他相关的数学分支的关键概念的话，这个概念难道不应该出现在该理论的公理中吗？事实上，如果我们采纳独立重复公理，情况就会是这样。然而，这段评述还可以被进一步展开。在讨论主观理论时，我们谈到，在某种意义上，可交换性概念是客观主义者的独立性概念在主观

理论中的等价物（见于第四章第五节）。尽管我们可以借助与客观进路中所使用的相同的公式在主观理论中定义独立性，但结果表明，在主观理论中，假定独立性等同于假定不能实现从经验中学习。因此，在主观理论中几乎从不作出独立性假定。在客观主义者假定独立性的场合，主观主义者会假定可交换性。因此，独立性并不是概率论总体上的典型特征，而是概率的客观解释的典型特征。这意味着独立重复公理可以起到使概率的客观解释区别于概率的主观解释的作用。我接下来将论证表明实情的确如此。

从我们之前的讨论可以推知，柯尔莫哥洛夫公理既可以被客观地解释，也可以被主观地解释。然而，值得留意的是，在这两种解释的任何一种中，在相关的形式体系里被明确地写出来的条件概率实际上是通过差异很大的方式被缩写成这个样子的。为了看清这一点，让我们从客观解释方面开始讲。在这里，样本空间（或属性空间）Ω 是某些可重复条件 S_s 的可能结果集。在柯尔莫哥洛夫的形式体系中，我们以 $P(A \mid B)$ 这种形式标记条件概率，其中 A 和 B 都是 Ω 的子集。然而，正如已经被指出的，$P(A \mid B)$ 其实是 $P(A \mid B \,\&\, S_s)$ 的一种缩写，尽管起根本作用的可重复条件 S_s 在柯尔莫哥洛夫的形式体系中从未被明确地写出来。

完全相同的情况也出现在主观解释中。令 e 和 f 为两个命题，分别陈述了特定的事件 E 和 F 的发生。据此，我们明确写出来的只是 $P(e \mid f)$ 这种形式的条件概率，但是在这里，$P(e \mid f)$ 其实是 $P(e \mid f \,\&\, K)$ 的一种缩写，其中 K 是被给出主观概率的那个人假定为真的背景知识。

要注意的关键之处是这样的。在这两种场合中条件概率都是以缩写的形式被标示的，但若要扩展缩写，必须被添加的东西在这两种场合中是不一样的。在客观解释方面，那是一个可重复条件集 S_s，而在主观解释方面，则是被所谈论的那个人假定为真的背景知识的主体部分 K。因此，如果我们使这种扩展得到了清晰的显示，那我们也就对这两种解释作出了辨识。但这也正是我们所做的，我们是通过把柯尔莫哥洛夫的概率空间（Ω，F，P）概念调整为概率系统（S_s，Ω，F，P）概念，并对独立重复公理作出清晰的表述来达到这方面的目的的。

这有助于我们进一步阐明柯尔莫哥洛夫公理的重大意义以及它们在概率论中的重要作用。这些公理足够抽象，因而既能被主观解释满足，又能被倾向解释满足。这样，它们就向这两种解释展示了数学上或结构上的共同特征。然而，如果我们想要把客观解释与主观解释区别开来，我们可以通过增加另一条公理——独立重复公理——来做到这一点的。如果我们想要把所得出的理论体系与观察相联系以此来为它进行辩护，那么我们就得增添一个证伪规则。一座从抽象的数学公理通往经验世界的桥梁就以这种方式被架设起来了。

第八章　主体间概率与多元主义的概率观

前面各章的讨论已经让我们看到了这样一种现象：主观观点（这种观点认为概率是某一个人的置信度）与客观观点（这种观点认为概率是物质世界的特性，就像电荷或质量）之间似乎存在着极为明显的两极分化。在这一章，通过表明还存在着一些居中的情况，我想要尝试减缓这种差异。相应地，在“主体间概率”一节，我将会再引入另一种概率解释——即**主体间解释**——正如它的名字所示，这种解释处于主观解释与客观解释之间的某个维度上。接下来，在“从主观到客观的谱系”一节，我将尝试表明在主观的与完全客观的立场之间存在着一个谱系，并且我还将尝试分析这个谱系的特点。这个分析自然地揭示出，并非仅有一个概率概念，而是有几个不同的但相互关联的概率概念，它们适用于不同的语境。在“多元主义的概率观”一节，我将对这样一些多元主义的概率观作出讨论。

第一节　主体间概率

概率的主观理论的出发点是我们称之为 B 先生的一个特定的人的置信度。我们设想有一位心理学家 A 女士，她让 B 先生在一个被周密地明确规定的打赌情境下打赌，从而着手测度他的置信度。因此，该理论是关于特定的人的置信度的。然而，这忽略掉了以下事实，即我们有很多——即使不是大多数——信念在性质上是具有社会性的。它们被一个社会群体的几乎所有成员共同持有，一个特定的人通常是通过他与这个群体的社会互动而获得它们的。如果我们认同库恩（T. S. Kuhn）（Kuhn，1962）的分析，那么这也适用于科学家们的很多信念。按照库恩的看法，在一个特定领域工作的科学专家们几乎所有人都接受一个包含了一套理论和事实命题的范式。因此，这些理论和命题被这个科学专家群体的几乎所有成员所采信。该群体的一个新成员要被训练去了解和接受这个范式，以此作为进入该群体的一个条件。大致相同的考量也适用于其他社会群体，例如宗教派别、政党等等。这些群体都拥有一些通常是由于一个人通过加入该群体而获得的共同信念。对于个人而言，要拒绝接受在他们所组成的一个群体中占支配地位的信念实际上是相当困难的，尽管也确实会有持不同政见者和异端分子出现。这方

面的一个显著事例就是，被恐怖组织绑架的人的确有时候会像帕蒂·赫斯特（P. Hearst）那样认同恐怖分子的信念。看来这一切显示出，除了存在着一个特定的人的特有信念外，还存在着社会群体的共有信念。实际上后者可能比前者更为根本。在第四章，主观概率是通过运用大弃赌论证而被引入的。我现在想要表明的是，我们可以把大弃赌论证推广到社会群体，这种推广将会引入我将称之为**主体间概率**的那个概念。

让我们先来回想一下先前（第四章第二节）所给出的赌商的定义。我们当时设想，A 女士（一位心理学家）想要测度 B 先生对某一事件 E 的置信度。为了做到这一点，她要让 B 先生同意在以下的条件下与她就 E 进行打赌。B 先生必须选择一个数值 q（称之为他对 E 的赌商），然后 A 女士再选定双方的赌注总额 S。如果 E 发生，则 B 先生支付 qS 给 A 女士以此作为对 S 的交换。S 可以是正的，也可以是负的，但 $|S|$ 在 B 先生的财产中只能占一个较小的份额。在这些条件下，q 被看做是对于 B 先生对 E 的置信度的一个测度。

为了把这推广到社会群体，我们可以保留我们的心理学家 A 女士，但我们应该把 B 先生替换为一个由人构成的集合 $B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$。为了简单起见，让我们一开始取 $n=2$。于是我们有以下的定理。

定理 1：假设 A 女士正在跟 $B=(B_1, B_2)$ 就事件 E 进行打赌。假设 B_1 选择了赌商 q_1，B_2 选择了赌商 q_2。A 女士将能通过对赌注总额作出选择而使得她无论如何都会从 B 那里赢得金钱，**除非** $q_1=q_2$。

证明：不失一般性，假设 $q_1>q_2$。假设 A 女士与 B_1 对赌时选择 $S>0$，与 B_2 对赌时选择 $-S$。这样，如果 E 发生，A 女士的收益 G_1 由以下式子给出：

$$G_1 = q_1S - S - q_2S + S = (q_1 - q_2)\ S$$

如果 E 没有发生，A 女士的收益 G_2 由以下式子给出：

$$G_2 = q_1S - q_2S = (q_1 - q_2)\ S$$

很明显，$G_1>0$ 并且 $G_2>0$，除非 $q_1=q_2$。

致谢：是莱德（J. M. Ryder）的论文（Ryder, 1981）启发我想出定理 1 的。在这篇重要的论文里，莱德（Ryder, 1981: 165）给出了一个结果，它是定理 1 的一个特例。莱德利用这个结果得到了一些有别于我的哲学结论。我将会用定理 1、定理 2 和定理 3 去引入主体间概率这个概念。不过，我把主体间概率看做是主观概率以外的而不是与它相矛盾的一种概率。另一方面，莱德认为他的结果表

明了基于大弃赌论证的整个研究概率的主观进路不是切实可行的。待会儿我就将陈述和讨论莱德对这一点的论证。

从 2 到 n 的推广是极为简单的。

定理2：假设 A 女士正在跟 $B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 就事件 E 进行打赌。假设 B_i 选择了赌商 q_i。A 女士将能通过对赌注总额作出选择而使得她无论如何都会从 B 那里赢得金钱，除非 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n$。

证明[①]：假设 q_i 并非全部相等。如此一来，必定存在着这样的 q_j 和 q_k，使得 $q_j > q_k$。假设 A 女士与 B_j 对赌时选择 $S>0$，与 B_k 对赌时选择 $-S$，与 B_i 对赌时选择 $S=0$，其中 $i \neq j$ 并且 $i \neq k$。这样，像在定理 1 的证明中那样论证，我们便可得出结论：A 女士无论如何都会从 B 那里赢得金钱，除非 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n$。

定理3：假设 A 女士正在跟 $B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 就事件 $E_1, \cdots, E_r$ 进行打赌，其中 $r \geqslant 1$。假设 B_i 对于事件 E_j 选择了赌商 q_{ij}。在下列条件：（a）对于 $1 \leqslant j \leqslant r$，$q_{1j} = q_{2j} = \cdots = q_{nj} = q_j$，（b）$q_j$ 满足标准的概率公理，A 女士将不可能对 B 打一个大弃赌。

证明：如果条件（a）得到满足，那么该群体可被视为对 E_j 持有赌商 q_j 的单独一个人（$1 \leqslant j \leqslant r$）。然后利用条件（b）就可以从拉姆齐－德·菲耐蒂定理的逆定理推出该结果。

非形式地说，定理 1、定理 2 和定理 3 所要表明的是以下内容。令 B 为某个社会群体。如果 B 的成员商定了一个共同的赌商——也许这是理性讨论的一个结果——而非该群体的每一个成员都选择他或她自己的赌商，那么这对整个 B 来说是有利的。如果一个群体事实上确实商定了一个共同的赌商，这就被称为该社会群体的**主体间**概率或**共有**概率（consensus probability）。这样，这种类型的概率可以与一个特定的人的**主观**概率或**私人**概率（personal probability）形成对照。

用于引入主体间概率的大弃赌论证表明，如果该群体商定了一个共同的赌商，这会使他们在与一个狡猾的对手打赌时免受损失。而这正是古老的民间智慧——即“一个群体内部的团结一致能使它免受外敌的侵害”这个断言——在数学方面的一个特定的例证。这种观点在许多传统的格言和故事中都有所表达。一个近期的例子就出现在黑泽明的电影《七武士》（*Seven Samurai*）中。在某个场景里，武士的首领勘兵卫正在极力劝说村民要合力击退强盗即将发动的攻击。“这是作战的一条规则。”他说，“集体防御会保住个人。个人防御会毁灭个人。”

现在回到我们的主题上来吧，而问题也随即产生了：“在什么样的条件下某一社会群体会形成一个主体间概率？”以下的条件看来是至关重要的：

（1）共同的意趣：群体的成员必须被一个共同目标联结起来；无论这个共

同目标是导致群体内部的团结还是竞争都不是很重要；重要的一点是，成员们有共同采取行动和达成一致意见的意趣；在这种情况下，关爱或恐惧会创建类似的纽带。这个共同目标也许是经济上的，但也不必就是这方面的；例如，一群战士可能会有以该群体最少的伤亡攻占敌方阵地这个共同目标。

（2）信息的流动：成员之间必须要有信息的流动和想法的交换，不过，无论这种交流是由中枢机构安排的还是分散进行的，是直接的（在任何两个成员之间）还是间接的（通过第三方的介入），都是不要紧的。

接下来我将对这两个条件作一些评论。条件（1）（共同的意趣）意味着群体的规模和构成是可以改变的，因为如果到了个体成员认为他们可以靠“单干”来获益的时候，他们可能就会决定脱离该群体；同样地，当新成员认识到他们与该群体构成了一个目标共同体时，他们可能就会加入它。相对于特定的事件，共同目标必须足够强以至于能把成员结合到一起，可是这也不必排除在另外的问题上，会有个体成员打算脱离群体或者以损害别人为代价获益。另一个有关的要点是，其形成主体间概率的正被寻求的那些命题必须与共同目标相关联。例如，请考虑侨居伦敦的意大利人群体。这个群体很可能会形成一个关于以下问题的共有概率，亦即在若干年内是否会有新的法令允许居于英国的意大利侨民可以在地方选举中投票。然而，如果说该群体应该形成一个关于南太平洋的象岛上的王企鹅的数目的主体间概率，那似乎是不合理的。

条件（2）（信息的流动）蕴涵着对条件概率的暗示。在主观理论中，我们把 B 先生指派给事件 E 的概率写作 $P(\mathrm{E})$，但这个概率事实上是有条件的，如果要被清楚明确地写出来的话，其形式应该是 $P(\mathrm{E} \mid K)$，其中 K 是构成了假定为 B 先生所拥有的背景知识的信念的集合。主体间概率也具有 $P(\mathrm{E} \mid K)$ 这种形式，但 K 现在所代表的是群体的背景知识。这可能比群体中任何个体成员所拥有的知识都要宽泛。由于群体内部存在着信息流动和想法交换，因此，如果一位成员有其他成员所缺乏的相关知识，他或她可以通过交流把它传播给别人。类似地，一个群体的逻辑能力和数学能力通常都会超过它任何一位成员这两方面的能力。若有任何人犯了一个逻辑错误，这通常都会被其他人所揭示和纠正。甚至连最优秀的数学家也会偶尔犯逻辑上的愚蠢错误。

如果群体非常大的话，在对条件（1）和（2）的满足方面可能会有一个问题。然而，在这种情况下，共有概率也许仍然是有可能存在的，只要有一个代理处、协会或工会去对这个群体（也包括了对它内部的信息流动）进行组织。

因此，我认为主体间概率这个概念是有可能应用于许多不同领域的：其中一个领域就是经济学，另一个是科学假说的认证。[2]然而，我没有想要建议主体间概率应该完全取代主观概率。使用前一个概念并不是要排斥使用后一个概念，反

而需要用到后一个概念。例如，如果 $P(\mathrm{E})$ 是社会群体 $B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 指派给 E 的主体间概率，那么 B 的每一位成员 B_i 都给 E 指派了主观概率 $P(\mathrm{E})$。此外，很可能会有一群人不能达成共识因而各有各的主观概率而不存在任何主体间概率。还有就是，一个社会群体可能达成了为几乎全部成员所接受的共识，但仍有一两个持不同意见者怀有与该群体的主体间概率不一样的主观概率。依我看，这些各种各样的可能性表明，对人的信念的分析既需要主观概率，也需要主体间概率。

刚刚对主观概率概念进行了辩解，现在正是适当的时机来考虑一下在本节的前面部分所提及的莱德对主观主义的反对意见。莱德对他的论点有如下的陈述：

> 主观主义者是认同不同的人有不同的置信度的，但对于把大弃赌论证应用于不止一个人的情况却没有多加仔细考虑。
>
> 如果我们有两个（或更多的）人对相同的简单事件 E 持有不同的置信度，就可以对他们打一个大弃赌。正如对于一个人的情况那样，这同样会被视为“灾难性的”和“明显不合理的”。这意味着主观主义者们实际上是从未进行过按大弃赌论证设想的赌博的。如果他们这样做了，可能就会有人不期而至并找出两个或更多的持有不同的置信度的主观主义者，从而构造出一个会给被看做一个群体的主观主义者们造成一定损失的打赌系统。
>
> （Ryder，1981：165）

莱德的这个论点既是似真的也是巧妙的，不过，我认为它是可以得到答复的。为了做到这一点，让我们来考虑我们这个由人组成的集合 $B=(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 和实验心理学家 A 女士。首先假设 A 女士对 B_1 打了一个大弃赌。很有可能 B_1 会认为这是“灾难性的”和“明显不合理的”，因为他或她无论如何都会输钱。然而，假设 A 女士对整个集合 B 打了一个大弃赌，而唯独没有对 B_1 这样做。B_1 是否会认为这种情况是“灾难性的”和“明显不合理的”呢？答案是肯定的，B_1 可能会这样认为，但他或她无须必然这样认为。为了看清这一点，让我们来考虑两种不同的甚至是极端的情况。

（1）$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 已经形成了一个协定，按照这个协定，他们既要共同分享各自在各种经济活动中所获得的任何收益，也要共同分担所遭受的任何损失，总的收益或损失由该群体的个体成员们平分。在这种情况下，如果 A 女士对这一整个集合打一个大弃赌，那么它的每一位成员（包括 B_1 在内）都会遭受损失。因此，B_1 必定认为这种情况是“灾难性的”和“明显不合理的”。请注意，在这一例子中我们的条件（1）（共同的意趣）得到了满足。如果考虑到了

这样的一个协定，那么，对于该群体而言，确保条件（2）（信息的流动）也得到满足显然是可取的，这样一来，该群体就可以通过讨论形成一个共识并拥有一个主体间概率，从而使得A女士不可能对他们打一个大弃赌。

（2）B_2，…，B_n 差不多都是被随机选定的个体，B_1 对他们既不熟悉也不关注。在这种情况下，A女士是有可能做到对整个群体 B 打一个大弃赌的，但 B_1 却不可能认为这是“灾难性的”和“明显不合理的”。只要 B_1 本人没有可能被打一个大弃赌，为什么他或她应该关注发生在该群体中其他不熟悉的成员身上的事情呢？

这里的关键之处是，把大弃赌论证推广到群体的做法仅仅对于那些有一个共同意趣的群体才是有意义的。这个论证表明，这类群体应该让群体内部的交流和信息流动确定下来，从而使得他们可以通过交流形成一个共识或主体间概率。只有以这种方式，整个群体才能使它自身免受狡猾的对手的侵害。通常的经验是，确实存在着这样一些具有一个共同意趣的群体，而且他们确实常常在其信念方面达成共识。

然而，如果我们正在论及的是一个缺乏共同意趣的群体，把大弃赌论证推广到群体的做法则是不具有效性的，因为每个人对于发生在该群体的其他成员身上的事情都会是漠不关心的。在这种情况下，每个人都将形成他或她自己的主观概率，而对其他人的信念则没有丝毫的关注。

一种看待概率的主体间解释的有用方式就是把它视为介于早期凯恩斯的逻辑解释与他的批评者拉姆齐的主观解释之间的解释。根据早期凯恩斯的观点，在给定证据e的情况下，只存在唯一一个对于某个结论c的合理置信度。如果真的是这样的话，我们可以料想，在给定e的情况下，几乎所有的人对于c都只有这样一个单一的合理置信度，因为毕竟大多数的人都是理性的。相对于演绎逻辑而言，这样一个广泛的共识的确是存在的。几乎所有具有那种用来理解相关问题的技术背景的人对于一个给定的逻辑演绎链条是有效的还是无效的都会达成一致意见。当然了，这个共识并不是全面的。实际上还存在着一些直觉主义者以及其他笃信各种形式的非标准逻辑的人。然而，即使不是全部人，也还是有相当多的人做出了同样的判断。

在e不是逻辑地衍推c的情况下，要判定对于结论c的置信度则是大不一样的事情，纵然这个置信度也得到证据e的保证。在这方面，不同的人可能会得出相当不同的结论，尽管他们在相关领域拥有相同的背景知识和专门技能，尽管他们全都是相当理性的。一个所有有理性的人都应该同意的单一的合理置信度看来只是个无根据的观念罢了。

关于概率的逻辑解释就谈这么多，但概率的主观观点也似乎不能完全令人满

意。置信度并非完全是私人的或个人的东西。我们往往会发现，属于一个享有某个共同观点的群体会有某种程度的共同意趣，还能达成对于它的一些信念的共识。这类群体的显而易见的例子就是宗教派别、政党或关注各种科学问题的学派。对于这类群体，主体间概率概念看来是一个合适的概念。这些群体可能是小的也可能是大的，但通常还不至于包含全人类。可见，这样的一个群体的主体间概率是介乎合理置信度（早期凯恩斯）与主观置信度（拉姆齐）之间的。

在凯恩斯提出他关于概率的逻辑理论的时候，他正是一个由富于逻辑头脑的剑桥知识分子组成的精英团体（使徒会）的成员。在这种环境中，他所认为的单一的合理置信度对全人类的有效性可能只不过是使徒会的共有信念而已。不管使徒会是多么的令人钦佩，但他们的一些共有信念是根本不会被其余的人类所持有的。这一点在20世纪30年代有明显的体现，当时使徒会形成了一个对于苏联共产主义的共有信念，而这肯定不是一个被该团体以外的每个人都持有的信念。

第二节　从主观到客观的谱系

在上一节，我以主观概率和它在大弃赌论证方面的根据为出发点，通过引入主体间概率，表明了我们如何能够朝着具有更大客观性的方向推进。现在我将尝试表明，我们可以把客观解释分为完全客观的解释和包含了某种主观（或人的）成分的客观解释。这将使我们能够在本节的末尾构造一个从完全主观延伸至完全客观的谱系。

我将使用**“完全客观的”**（fully objective）这个词组去指称那些完全独立于人的事物。关于这样一个事物的一个显而易见的例子就是太阳。在有任何人存在以前，它就在恐龙时代产生能量和发出能量了，而且就算所有人明天被汽化掉，它还是会以完全一样的方式继续产生和发出能量。事实上，人的活动迄今为止尚未能对太阳造成什么影响。可见，它是完全客观的。太阳的例子可以与一个杯子的例子形成对照。一个杯子是一个物质客体，因而在某种意义上是客观的，但它显然不是独立于人的。它是出于人的目的由人造出来的。其实我们可以说，如果所有人明天都被汽化掉了而其他客体没有受到影响，那个杯子就不复为一个杯子了，尽管它仍旧是一个物质客体。一个杯子是用来喝液体的某种东西，如果一个客体不再以这种方式被使用了，则它也不复为一个杯子了。

我将用**“具有人工制品性的”**（artefactual）去称呼某种客观的但又不独立于人的东西。在这里，“具有人工制品性的”当然是意在包含诸如杯子那样的物质人造物的，但它还有一个稍微广泛一点的意义。这可以以天上的星座为例来说明。让我们来考虑大概是最为人所熟知的星座——北斗星。这是在北半球的夜空

中很容易就能被认出的一组星体。我们不可以说北斗星是主观的，因为任何人只要受到些许指引都能从它周围的星体中把它辨认出来。我们也不可以说它像群体信念那样只不过是主体间的，因为它是由确实客观存在的星体所组成的。另一方面，我们不可以说它是完全客观的，因为在组成它的那些星体之间不存在真实的物理关联。图 8.1 说明了这一点，它表明了北斗七星之间的距离。

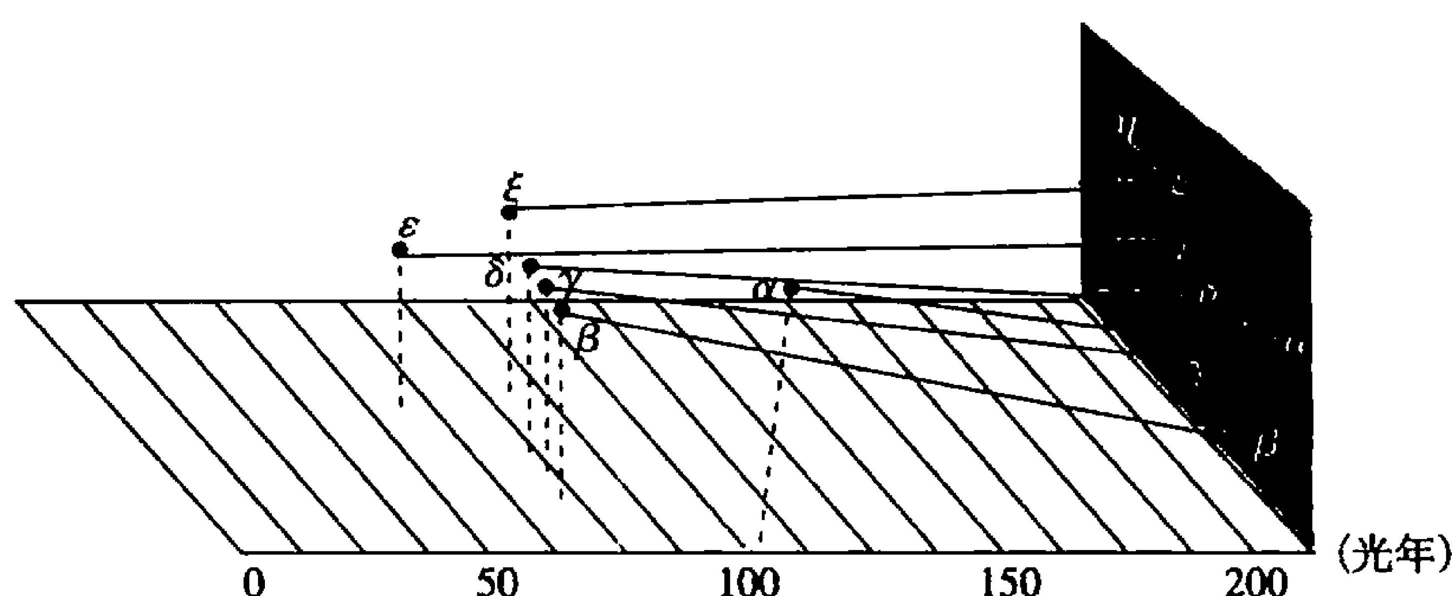


图 8.1　北斗七星之间的距离

可以看到，那七颗星彼此之间的距离其实是非常远的，尽管从一个人类观察者的角度来看它们似乎形成了一个自然类别。例如，被标示为 α 和 ε 的这两颗星相距大约 50 光年。在其他星座中，星体之间的距离甚至更远。例如，半人马座中的星体之间的距离从 4 光年到 325 光年不等。另一个表明了星座具有任意性的事实是，在古代中华文明中所划分的星体类别与西欧的星体类别是不一样的。星座并不是迪昂（P. Duhem）（Duhem，1904—1905：24 – 30）可能会视之为**自然分类**(natural classification) 的东西。

尽管如此，星座在某种意义上又是客观的，因而我打算把它们归入具有人工制品性的一类，就像杯子一样。这个想法的立足点是，在这两种情况下都有一种基本的原材料是存在于自然界中的。对于杯子来说，这大概就是黏土，而对于星座来说，这大概就是星体了。这种基本原材料是由人来使它成形的。在杯子方面，塑形是一个物理过程。在星座方面，这是一个更须用到脑力的过程，在此过程中要选择把一组星体归类到一起并赋予该群体一个特定的名称。若人类不存在的话，是不会有什么星座的，但是，同样地，若星体不存在的话，也是不会有什么星座的。星座是人与自然界互动的产物。

在星体的这种关联中还有一点很重要的是，星座形状表面上的稳定性要归因于人类的时间标度。[3]图 8.2 说明了这一点，它展示了北斗星在十万年前以及十

万年后看起来可能会是什么样子。如果我们设想有一些生物它们对于十万年的主观体验就像我们对于一秒钟的体验那样，那么星座就不会有恒定的形状了而是呈现出不断变化的形状。因此，这样一些生物是不会形成我们视之为星体的固定排列的“星座”概念的。相反地，假设有一些生物经历了对于我们而言的几秒钟，它们在主观上就像经历了几百年。这些生物会把对于我们来说就像海浪那样完全转瞬即逝的事物看做固定的和相对不变的客体。

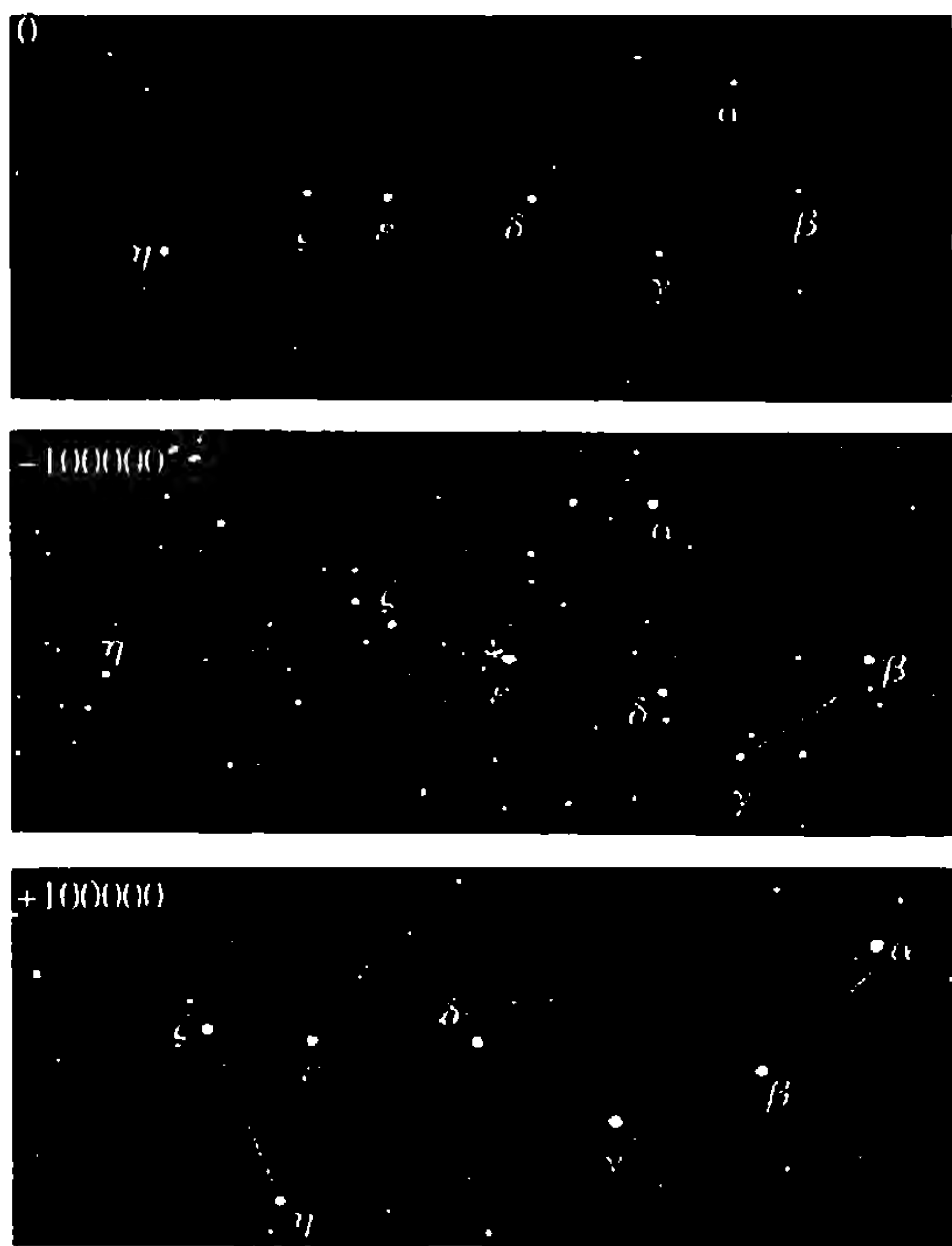


图 8.2　如今的北斗星、十万年前的北斗星与十万年后的北斗星

量子力学的微观粒子——比如说电子或光子——提供了关于具有人工制品性的东西的另一个例子。玻尔（N. Bohr）对波粒二象性的解答是这样的，相对于一种实验设置，一个电子是波，而相对于另一种，它则是粒子。也许实在就其本身而言具有一种整体性，因此把它划分为电子和光子是有几分任意性的，这就像把天空中的星体划分为星座是任意的一样。再者，正如制陶工人可以用一个模子把生黏土变成一个杯子，也可以用另一个模子把它变成一个碟子，因此物理学家可以用一种实验设置把电子变成波，也可以用另一种实验设置把它变成粒子。这并不意味着电子缺乏客观存在性。电子所具有的客观存在性在程度上就跟杯子和

碟子的一样；但电子的存在性和特性都取决于人与自然的互动。也就是说，电子、光子等等都是具有人工制品性的。

来自于量子力学的这个例子也许带有一点猜测性。为此，我们还是回到概率上来，在这方面我们可以在一个较为坚实的基础上对“完全客观的”与“具有人工制品性的”加以区分。让我们首先来看看关于抛掷一个有偏向性的硬币的标准例子。在这里，正面朝上的概率是客观的，但显然是具有人工制品性的。硬币是一个人造物，对它的抛掷是根据固定的规则在人的介入下所实施的一个过程。如果我们考虑的是量子力学中由某个实验的重复实施所产生的概率，完全相同的看法也适用于这种情况。这些概率都是具有人工制品性的，如果前一段的分析是正确的，则它们具有与相关的微观粒子——比如说电子——相同的特性。我认为这会使人们更容易理解波普尔引入概率的倾向解释及把它用于量子力学的愿望。

然而，如果现在我们考虑一个放射性原子衰变的概率，那我们就是在离具有人工制品性的领域而去，走向完全客观的领域，因为在这种情况下重复事例（不同原子的衰变）在大自然中是同时发生的而且无须人类的任何介入。不过，这里有一个困难，那就是，如果我们想要给一个放射性原子的一种特定类型的衰变的概率赋予一个数值，我们就必须明确规定一个时间段——比方说一年，而这个时间段看起来像是一个人类附加物，使得那个概率较为具有人工制品性。有一种方法可以避免这个问题。放射性衰变都是泊松过程（欲了解对此的一些经验证据，请参见 Cramér，1946：434 -437）。现在在一个泊松过程中基本参数——比方说 λ——表示，在一个很小的时间间隔 δt 里，一个事件——例如一次衰变——的概率大约是 $\lambda\delta t$。因此，粗略地说，λ 可以被看做是每单位时间内一个事件的概率。明确规定一个具有人为因素的相对时间间隔的需要不复存在了，λ 可以被看做是某种完全客观的东西。

我们现在可以清楚明确地陈述我们用于概率的从主观通往完全客观的谱系。它有四个层次：

（1）主观的：概率在此代表特定的人的置信度。

（2）主体间的：概率在此代表已经达成一个共识的某一社会群体的置信度。

（3）人工制品性：概率在此可以被看做是存在于物质世界的因而是客观的，但它们是人与自然互动的结果。我们可以给出很多关于人工制品性概率的事例。之前我们讨论过 40 岁的史密斯先生的例子，并对他可否活到 41 岁作过考虑。我们指出，史密斯先生可以通过许多种不同的方式被归类，而这些归类条件的每一种都会产生一个关于他能否活到 41 岁的不同的概率。从类似于星座的某方面来讲，这些概率是具有人工制品性的。还有就是，在抛掷硬币和其他机会游戏中的

概率，以及与科学中的可重复实验相关联的概率都是具有人工制品性的。

请注意，有意思的是，德·菲耐蒂所提出的一个标准把这样一些人工制品性概率都归为客观的一类。德·菲耐蒂说道：

> 应拒绝赋予概率以任何客观的数值，我的意思是，一个人无论以何种方式评估一个特定事件的概率，都没有什么经验能够证明他是正确的还是错误的；一般说来，也没有任何可想到的标准可以赋予有人在此想要对正确与错误作出的区分以任何客观的意义。
>
> (de Finetti，1931a：174)

相反地，有人可能会说，如果对一个概率的评估能够被经验表明是正确的还是错误的，那么那个概率就可以被视为客观的了。现在来考虑一个典型的人工制品性概率，比如说，以一种被明确规定的方式抛掷一个特定的具有偏向性的硬币得到正面朝上的概率。如果我判定这个概率为3/4，那么，照例假定一个证伪规则，这个赋值就有可能被一个由——比方说2000次——抛掷结果构成的序列验证或反驳。当然了，德·菲耐蒂是不可能会接受方法论的证伪主义或者一个证伪规则的，而这可能会是他捍卫他的全然主观的立场的方式。然而，如果我们仿效大多数统计学家采纳方法论的证伪主义，那么，根据德·菲耐蒂本人的客观性标准，人工制品性概率就确实成为客观的了。德·菲耐蒂的标准跟此前（第七章第四节）提到的客观性与可重复条件之间的联系也是有关的。如果一个概率是与一个可重复条件集联系起来的，我们就可以通过复现那些条件来检验一个对于那个概率的猜测性评估是不是正确的。

（4）完全客观的：最后我们达到了客观性的最高等级。完全独立于人的存在于物质世界中的事物应该被看做是完全客观的。我们把单位时间内一个特定的放射性原子发生衰变的概率视为在概率的领域内完全客观的概率的例子。

之前（第二章第三节）我们考虑过概率的两面性，并把概率区分为两种类型，即认识论的与客观的。在上述的谱系中，（1）和（2）这两种置信度解释（the degree of belief interpretation）明显是认识论的，而（3）和（4）则是客观的。我将在第九章中给出一些介乎认识论的与客观的之间的例子。因为它们处于上面考察过的（2）和（3）这两种情形之间，所以它们将倾向于使我们的谱系更具连续性。

第三节　多元主义的概率观

我们到目前为止所考察过的很多著述家均声称他们的概率解释对于这个概念的所有用法都是有效的。换句话说，他们主张一元主义的概率观。这是符合凯恩斯和德·菲耐蒂的情况的。在某种意义上，冯·米泽斯的情况也是如此。冯·米泽斯确实承认存在着一个他的频率理论没有论及的日常语言的或通常意义的概率概念。然而，他声称这个概率概念纯粹是定性的，相关的数学理论不能被用到这个概念上。他认为他的频率理论论及了数学概率论可以被有效地用于其上的所有情况。

与这些一元主义的概率观相对照的是多元主义的概率观，根据这种概率观，数学演算有许多种不同的解释，每一种解释在特定的领域或语境中都是有效的。在这一节，我将对这种多元主义的立场作简要的考察。我一开始会讨论拉姆齐对这个问题的看法，因为他看来是第一位在概率方面主张多元主义的20世纪思想家。

拉姆齐的立场被称为**双概念观**(two-concept view)，在他1926年发表的论文的前言中对此有如下的陈述：

> 本文把概率论视为逻辑的一个分支，即关于部分信念和非结论性推论的逻辑；但这里无意暗示这是该学科唯一的甚至最重要的方面。不仅在逻辑中，而且在统计科学和物理科学中，概率都是至关重要的。我们事先不能确定它在逻辑中最为有用的解释在物理学中也将会是合适的。统计学家多半采纳概率的频率理论，而逻辑学家大部分都拒斥这种理论。其实他们之间的意见的普遍分歧很可能表明：这两个学术群体是在讨论不同的事情，“概率”这个词在一种意义上被逻辑学家们所使用，而在另一种意义上被统计学家们所使用。因此，我们将要得出的关于概率在逻辑中的意义的结论一定不能被视为对它在物理学中的意义的预先断定。
>
> (Ramsey，1926：157)

这里拉姆齐表示概率在逻辑中的意义可能是有别于它在统计科学和物理科学中的意义的，显然逻辑在此被看做是既包含了演绎逻辑也包含了归纳逻辑。这样的一种立场也肯定是卡尔纳普（Carnap，1950：19-51）所主张的。卡尔纳普谈到了两个概率概念，他称之为概率$_1$和概率$_2$。概率$_1$是用于逻辑的概率，概率$_2$是用于统计科学和物理科学的概率。对于概率$_2$，卡尔纳普主张一种频率解释，但对

于概率$_1$，至少在最初的时候，他是赞同一种逻辑解释的，较为类似于凯恩斯的逻辑解释而非拉姆齐的主观进路。事实上，卡尔纳普（Carnap，1950：42－51）还对被他称为"归纳逻辑中的心理主义"的观点作了批评。

在拉姆齐1926年的论文中，关于双概念观，他还有进一步的想法要表达。他论证表明，概率的数学演算可以被赋予一个以类的比率（class ratio）为依据的频率解释。然后，在引入了他以部分信念为依据的可供选择的解释之后，他作了以下的评论：

> ……在本文的开头，我们看到概率演算可以根据类的比率来得到解释；现在我们已经发现，它也可以被解释为一个关于一致的部分信念的演算。因此，很自然地，我们应该预期这两种解释之间有某种密切的联系，亦即预期获得某种对于把同一个数学演算运用于两类如此不同的现象的可能性的说明。
>
> （Ramsey，1926：187）

对任何一个主张多元主义的概率观的人而言，拉姆齐在此提出了一个重要的问题。这样的一个人必须表明相同的数学演算如何能够有不同的解释，以及这些不同的解释是如何相关联的。拉姆齐当时探讨了两种解释——一种频率解释和一种部分信念度解释（degree of partial belief interpretation）。他回答他自己的问题如下：

> 这样一种说明是不难找到的；部分信念与频率之间也有很多联系。例如，被经验到的频率经常导致相应的部分信念，而部分信念则导致对符合伯努利定理的相应频率的期望。但这都不恰好是我们想要的那种联系；一个部分信念大体说来不能唯一地与任何实际的频率相联系，因为这种联系总是通过把那个正被讨论的命题当做一个命题函项的例示而得到的。我们选择什么命题函项在某种程度上是任意的，并且相应的频率也将根据我们的选择而作出相当大的改变。频率理论的某些倡导者声称部分信念就意味着对于一个频率命题的完全信念，这些说法是不能成立的。但我们发现，部分信念这个概念本身就要涉及一个假设性的或理想的频率；假定善是可加的，程度为 m/n 的信念就是这样一类可以导致某种行动的信念，这种行动将会是最好的，如果它被重复 n 次，并且在其中的 m 次中该命题为真的话；或者，我们也可以更简短地说它是在许多完全相同的假设性场合中最适当的信念，在这些场合的 m/n 中那个正被讨论的命题为真。正是部分信念与频率之间的这种联

系使我们能够把频率演算用做一个关于一致的部分信念的演算。而且在某种意义上我们还可以说，这两种解释是具有同样内在意义的主观方面和客观方面，正如形式逻辑可以被客观地解释为一系列的重言式也可以被主观地解释为关于一致的思想的规律。

(Ramsey，1926：187－188)

拉姆齐在此所表达的关于频率与部分信念之间的联系的看法是很有吸引力的。特别引人注目的是他声称“这两种解释是具有同样内在意义的主观方面和客观方面”。(Ramsey，1926：188) 不过，我们之前的讨论（第六章第二节）表明，拉姆齐的论述是过于简单了。

让我们再回到我们那个关于试图估计40岁的史密斯先生能活到41岁的概率的例子上来。这里所存在的一个被我们称为“参照类问题”的困难是，史密斯先生可以在许多种不同的条件下被归类。例如，他可以被看做一个40岁的男人、一个40岁的英国男人以及一个每天抽两包烟的40岁的英国男人等等。每一个条件集都将给出一个不一样的重复事例序列，在每个序列中那些能继续生存到他们41岁生日的人的频率将是不一样的。这样一来，我们应该把我们对于“史密斯先生将会活到41岁”这个命题的部分信念与哪个频率联系起来才好呢？事实上，拉姆齐本人以不一样的说法把同一个困难表述如下：

……一个部分信念大体说来不能唯一地与任何实际的频率相联系，因为这种联系总是通过把那个正被讨论的命题当做一个命题函项的例示而得到的。我们选择什么命题函项在某种程度上是任意的，并且相应的频率也将根据我们的选择而作出相当大的改变。

(Ramsey，1926：187－188)

然而，在我看来，参照类问题使得他对于以下情况的说明是无效的，其时他在随后的几行文字中这样说道：“程度为 m/n 的信念……是在许多完全相同的假设性场合中最适当的信念，在这些场合的 m/n 中那个正被讨论的命题为真。”正如我们之前（第七章第四节）所论证表明的那样，不可能存在着在任何绝对意义上的完全相同的场合，而只可能存在着在某些方面完全相同的场合。但我们怎样选择这些方面呢？这会再次引起参照类问题，因为着眼于不同的方面将产生不同的频率。

当然了，参照类问题在某种程度上是可以被克服的，那就是把一个单独的事件归类为我们可以获得关于它的统计资料的那个最小参照类的元素（如果存在

这样一个类的话）。因此，在我们之前的例子中，我们确实应当偏向于把史密斯先生归类为那些每天抽两包烟的40岁的英国男人所构成的类的一个元素，只要我们对于这个类有可靠的频率数据。但是，正如我们从弗兰西斯卡论点所见，这种最小参照类策略仍不足以将主观概率与频率联系起来。

在关于弗兰西斯卡的例子里，最小参照类是由拥有一辆低座小摩托车的16岁的罗马人构成的类，这个类中的相关频率（比方说f）就是那些人发生交通意外的频率。弗兰西斯卡论点是，由于她比普通的16岁的罗马人更加明智和能干，所以她会更为小心谨慎地驾驶她的小型摩托车，从而使得她发生意外的概率要低于f。对于那些了解她的性格的人而言，弗兰西斯卡关于她比同辈的人更加明智和能干的断言看来确实得到了辩护，因而她的论点似乎是正确的。此处的结论是，对她发生意外的置信度应该被看做是有别于相关频率f的。其实正如我们所见，凯恩斯（Keynes，1921：322）论证表明，以一些有关的统计频率作为我们对于单个事件的概率的基础往往是非常不令人满意的，因为这样做的时候，我们很可能正在忽略一些关于那一具体事例的相关的非统计性信息，而那些信息可能会使我们将概率估计得高于或低于频率。这一切表明拉姆齐把频率和置信度说成是“具有同样内在意义的主观方面和客观方面”（Ramsey，1926：188）是不恰当的。

拉姆齐那篇写于1926年的文章主要是关于概率在逻辑中作为部分信念度的用法的。然而，他还打算再多写一章，谈一谈统计科学和物理科学中的概率。令人遗憾的是，由于他在1930年1月19日过早地离世，关于这个论题保存下来的只有残篇，因此难以重构他的想法会是怎么样的。基于保存下来的残篇，伽拉沃蒂（Galavotti，1994，1999）现已给出了一个具有学术性的和似真的说明。伽拉沃蒂1999年的那篇文章还是很有意思的，因为她试图通过综合拉姆齐与德·菲耐蒂的观点来发展出一种解决这个问题的新思路。然而，在此我并不打算进一步讨论拉姆齐的立场，而是想简要地说明一下我自己对于这个问题的看法。

通过回顾本书这一部分的各章，在我看来，我们可以得出以下关于各种可能的概率解释的结论。首先，尽管古典解释是适用于机会游戏的，但对于概率的所有现代应用都是不恰当的。因此，它必定被认为是要被取代的。逻辑解释在当代仍然有拥护者，但那些与无差别原则相关的困难在我看来对于该理论是致命性的。无差别原则无疑是会导致悖论的，尽管对于其中的一些悖论存在着巧妙的解决方案，但还是没有可以消除全部悖论的一般性方法。任何使用无差别原则的人都从来不可能确定它是否将要导致矛盾与何时会导致矛盾。唯一保险的策略就是完全摒弃这条原则，而这便意味着要放弃逻辑解释——至少是要放弃传统形式的逻辑解释。相比之下，主观解释和由它衍生的主体间解释在我看来对于概率的数

学演算是相当有效的解释。把置信度等同于赌商的做法与大弃赌论证是可以被批评的，而且也已经得到了批评，但在我看来它们可以充分实事求是地和足以令人信服地为主观概率和主体间概率提供一个可靠的基础。另一方面，德·菲耐蒂试图借助他的“可交换性归约”把所有概率都归约为主观概率的做法在我看来是失败的（见第四章第六节我对此的批评）。为此，我会论证表明，除了概率的主观解释和主体间解释，还需要有一种客观解释，所以我是坚持一种多元主义的概率观的。

现在转到概率的客观解释上来，在我看来，冯·米泽斯的频率理论是概率演算的一种有效解释，这是不可否认的。这个理论相对于经典数学是可证明的一致的，而且它关于概率的频率解释在有限可加性方面也是满足柯尔莫哥洛夫公理的。另一方面，第七章所阐述的那个倾向理论看起来在一系列方面都确实要优于冯·米泽斯的理论。该倾向理论立足于一种关于概念创新的非操作主义的观点，这种观点与冯·米泽斯的操作主义相比更好地说明了自然科学中的概念创新；该倾向理论消除了关于无限聚合的所有问题，而且通过引入一个针对概率陈述的证伪规则，它给概率与频率之间的关系提供了一种与标准的统计实践符合得非常好的说明；该倾向理论消除了冯·米泽斯所引入的随机性和独立性这两个互不相关的概念，把二者都归约为独立性；该倾向理论把概率与可重复条件而非聚合联系起来，从而允许相关的演算有更广阔的应用范围；该倾向理论与柯尔莫哥洛夫公理以及运用测度论来讨论概率的现代数学研究进路都符合得比较好，因为它允许把概率作为一个未加定义的概念来引入；等等。把所有这些理由都结合起来，我认为我们可以确定地说该倾向理论已经取代了冯·米泽斯的频率理论。

因此，这一切讨论的结论就是，当前存在着三种切实可行的概率解释：主观的、主体间的与倾向的。有意思的是，它们相当于弗莱克（L. Fleck）所谓的认知方面的三要素，他曾写到了“认知所涉及的三要素——即个人、集体与（所知的）客观实在”（Fleck，1935：40）。现在对于这三种解释，我们可以重复拉姆齐的评述：“很自然地，我们应该预期……这些解释之间有某种密切的联系，亦即预期获得某种对于把同一个数学演算运用于……这样一些不同类别的现象的可能性的说明。”（Ramsey，1926：187）正如对于某种多元主义的概率观的任何支持者那样，其实对于我们而言，说明各种解释之间的联系也是必要的。

主观概率与主体间概率之间的联系是直白的，因为后者正是前者从个人到群体的推广。这样，关键的问题就是要说明概率的主观解释是如何与客观倾向解释相关联的。我的看法是，客观倾向解释应该被看做是根本的。赌徒们使用诸如硬币、骰子、轮盘等器具所做的实验调查得到了大量关于随机现象的经验材料。尤其是，这样的一些现象被发现会服从两个粗略的经验定律——统计频率稳定性定

律和排除赌博系统定律。数学概率论就是被发展来解释这些定律和使它们更为精确的。后来它又被推广去解释出现在从放射性到遗传学等很多不同领域的统计现象。因此，概率论基本上就被理解为一门关于随机性的数理科学了，而正是这个理论在解释大量的经验材料（和使之更为精确）方面的成就认证了它的那些公理并为我们接受它们提供了辩护。

主观主义者已经表明，相关的数学演算可以被推广去处理对于特定事件的置信度。于是这两种解释之间的联系就出现在了机会游戏的领域。如果一个赌徒正在就一颗骰子接下来将会掷出的结果——比方说 5 点——进行打赌，那具有重要意义的就是他或她对于那次特定的抛掷的赌商。然而，背景知识一般都会诱使他或她将这个赌商等同于那颗骰子得出 5 点的客观倾向。既然在这种特定的情况下赌商是等于倾向的，那么，对于它们应该遵循同样的数学演算，就可能不会显得那么出人意料了。然而，赌商与倾向的这种等同性实际上仅仅在机会游戏这种简单场合中有效。如果我们正在考虑的是哪一匹马将赢得一场比赛或者甚至是一个特定的人是否会在接下来的五年内发生一次交通意外，那么赌商就很可能是与倾向有偏差的，又或者其实在此要界定任何客观倾向是不可能的。以这种方式，概率的主观解释又真的可以把概率演算推广到客观解释所不能处理的场合，虽然它在某一方面与客观解释相关联。这种观点实际上与德·菲耐蒂在下面那段文字中所说的是一致的：

> 不难承认，唯有主观主义的阐释才适用于实际预测（运动结果、气象事实、政治事件等等）的场合，但实际预测一般不会被放在概率论的框架内，即使对概率论作最广义的解释，在其框架内通常也不会有实际预测的位置。另一方面，可能让人较难同意的是，正是这种说明实际上为在某些传统领域内被认为属于概率概念的那种较为科学和深刻的价值提供了理论基础……
>
> （de Finetti，1937：152）

当然了，德·菲耐蒂是认为主观解释可以被推广去覆盖这些“传统领域”的，而这正是我不同意他的地方（见第四章第六节我对他的可交换性归约的批评）。我会论证表明，概率在这些领域确实是有一种“较为科学和深刻的价值”，而这正是对于数学概率论最基本和最重要的东西。另一方面，主观主义者已经表明了概率演算的用途如何可能从这些传统领域被推广到“实际预测”的场合。这种推广是一个重大的成就。

客观解释与主观解释之间的本质区别依我看是这样的。在客观解释中，概率

是与具有相互独立的结果的可重复条件相联系的。由于那些条件是可重复的，因此，如果我们采用一个证伪规则，那就有可能检验我们对概率的赋值，要么认证它们要么反驳它们。正是这种特性使得这些概率是客观的。另一方面，主观概率适用于单称事件，因为在这些场合中，要么是不存在任何能被很容易地界定的可重复条件——就像在赛马的场合那样，要么是就算有这样一些能够得到界定的可重复条件，它们也表达不了我们所有与那个单独的事件有关的知识，这就像对一个特定的人将会在接下来的五年内发生一次交通意外作出考虑那样。正如我之前（第七章第四节）所指出的，我们可以把柯尔莫哥洛夫公理推广到这样一个形式体系，在该形式体系中关于具有相互独立的结果的可重复条件的假定是被清楚明确地作出的。这种推广实际上是以公理化的方式刻画客观倾向解释，并使它与主观解释区别开来。然而，标准的柯尔莫哥洛夫公理既可以被主观地解释也可以被客观地解释。

我对各种概率解释及其如何相关联的论述就到此结束了。在本书的最后一章，我将论证表明不同的概率解释分别适用于自然科学和社会科学，以此阐明多元主义的概率观。

第九章　多元主义的例证：自然科学与社会科学之间的种种差异

在前一章我论证支持了这样的观点，即存在着若干种适用于不同语境的、不一样的但相互关联的概率概念。我认为，虽然它们可以被排列在一个从主观向完全客观延伸的系列中，但根据概率的两面性，把它们分为认识论概率和客观概率也仍然是合宜的。在本书的最后这一章，我希望通过论证表明存在着需要不同的概率解释的两大学术研究领域，以此阐明并加强这种多元主义的概率观。更具体地说，本章的论题将会是：概率的认识论概念适用于社会科学，而概率的客观概念则适用于自然科学。尽管这个论题在预期上是适用于所有社会科学的，但我将专注于经济学中的概率解释，因为概率在经济学中的角色已经得到了很多人的讨论。关于这一点，值得指出的是，大部分的概率的认识论解释的主要提倡者（凯恩斯、拉姆齐、德·菲耐蒂）都关注概率在经济学中的应用，而大部分的概率的客观解释的主要提倡者（冯·米泽斯、费希尔、内曼、波普尔）都关注概率在自然科学（物理学和生物学）中的应用。

在“支持对经济学中的概率作认识论的而非客观的解释的一般性论点”一节，我将提出一些一般性论点，用以支持对经济学中的概率作认识论的而非客观的解释。正如已被注意到的，这意味着自然科学与社会科学之间存有差异。此外，结果表明，这节的论点与索罗斯（G. Soros）为支持他的论题“社会科学有别于自然科学”而提出的论点（见于Soros，1987/1994）有某些共同的特征。相应地，我将在“索罗斯论自然科学与社会科学的差异”一节阐述索罗斯的某些论点，并指出它们与第一节的那些论点的相似性。在以这种方式为论点“社会科学与自然科学之间存在一处重大差异”提供更有力的理由之后，我将用它去尝试解决本书在前面（见于第七章的开头）所提到的一个显而易见的矛盾。在第四章论述主观理论时，我是赞同拉姆齐和德·菲耐蒂依据赌商对置信度所下的操作定义的，因为它为主观解释提供了一个令人满意的基础。不过，在第七章论述倾向理论时，我批评了把操作主义用于自然科学的做法，并发展了一个非操作主义的理论。因此，这看起来好像我既接纳又拒斥操作主义。然而，根据本章的论题，这个矛盾很容易就得以消解。在最后一节，我将论证表明：操作主义适用于社会科学但不适用于自然科学。

第一节 支持对经济学中的概率作认识论的而非客观的解释的一般性论点

展开这方面讨论的一个有效途径就是从考虑拉德写于1983年的一篇有意思的文章着手。在这篇论文中，拉德强烈地论证反对概率的客观解释，他是完全拒斥这种解释的。我将采取这样一种立场，它部分地同意拉德，也部分地不同意拉德。我将会作出的断言是：拉德的论证的确排除了概率在经济学中的客观解释，但是对于概率在自然科学中的客观解释，它们并不是有效的批评。拉德质疑的是格涅坚科（B. V. Gnedenko）（Gnedenko，1950）所提出的概率的客观解释。然而，这种解释事实上与第七章所给出的倾向解释是颇为类似的。两者皆认为，客观概率是与可重复条件相联系的，这些条件的结果都是独立的。在前面（第八章第三节），我论证表明倾向解释是当前可获得的最好的关于概率的客观解释。因此，在这一节，我将自始至终把客观解释视为倾向解释。这将是对解说的简化，但对那些论点却不是必需的。仍然偏爱冯·米泽斯的频率理论的人只需在下文中把对于以某一反复出现的条件为基础的独立试验的考量替换为对于随机聚合的考量。这些论点照样会获得正式认可。

拉德是从格涅坚科的客观主义的一个重要假定着手展开他的批评的，他对该假定作了如下的陈述：

> ……一个事件A被认为相对于条件C有一个概率，仅当至少在原则上有可能在同一条件C重复出现的情况下实施次数不受限制的关于A的相互独立的试验……
>
> （Lad，1983：290）

这当然就是第七章所论述的倾向理论的关键特征了，根据那种理论，客观概率是与一组可重复条件相联系的，条件的重复出现造就了独立试验。拉德否认有可能找到这样的一组条件：

> 关于某一实验的条件的可重复性的断言基本上是某种形而上学思维模式的一种表现……两个实验显然是完全不同的事件，至少在时间或空间上是有区别的，而且在无穷无尽的其他事项上也是有区别的。
>
> 想必大自然演化的辩证过程是不允许有完全相同的情况重复出现的可能性的，这种可能性对于合乎格涅坚科的诠释的概率在原则上是必需的。
>
> （Lad，1983：291）

拉德声称两个实验是不同的事件，因为它们在若干方面的状况都是不一样的，他这样说当然是对的。另一方面，或许有可能找到一组条件 C，对于这组条件：①尽管 C 的各次重现确实在若干事项上是不一样的，但出于我们所怀有的目的，我们可以忽略这些变化；②各次重现彼此间都只有非常细微的影响，因此它们可以被认为是实际上独立的。换言之，我们也许能够做到让一组条件 C 重复出现，使得从实用的观点来看每次重现都可以被视为独立的。每当实验方法被成功运用的时候，想必情况也正是如此，这在自然科学中是相当常见的。就经济学而言，也许不可能以一种令人满意的方式明确规定一个由独立的重复事例所构成的序列，在这一点上我是同意拉德的。

希克斯（Hicks，1979：103－122）表述了一种与本节所捍卫的相类似的观点。希克斯一开始区分了两种概率解释：

> 正是频率理论成为了正统学说；大多数论述统计数学的著作都把它作为自身的出发点。另一种可供选择的进路的最主要的拥护者是凯恩斯和哈罗德·杰弗里斯，他们的观点分别见于《论概率》（1921）和《概率论》(*Theory of Probability*)（1939）……重要的是，凯恩斯这位对这些问题有过十分深入的思考的现代经济学家是这种可供选择的理论的拥护者。我本人得出的看法是：尽管频率理论在自然科学的很多领域应用得极为自如，但对经济学的覆盖面还不够宽。
>
> （Hicks，1979：105）

希克斯在此对照了两种概率解释——频率解释和逻辑解释。我们自己的框架更宽阔一些，因为我们把客观的概率理论（包括频率解释和倾向解释）与认识论的概率理论（逻辑解释、主观解释和主体间解释）区分了开来。然而，当希克斯表示频率理论适用于自然科学而逻辑理论适用于经济学的时候，他在自己的框架内正趋近于本节的观点，即客观概率适用于自然科学而认识论概率适用于经济学。以下引自希克斯的文段清楚地阐明了这一点：

> 根据频率理论，概率是**随机实验**的一种特性……
>
> 显然，有这样一些情形，它们在经济学中很重要，我们在这些情形中是以另一种意义谈及概率的。克拉默……在 1944 年底撰写他的著作的那一章时，在其中……给出了……欧战将在一年内结束的概率作为一个例子。这是一个大多数人在那个时候都会估计得很高的概率。但相当明显的是，它不属于频率定义的范围；这并不是关于可被重复进行的试验的问题。

> 我们在经济学中不能回避这种属于别的类型的概率。进行投资和买卖证券所依据的都是对于概率的判断。对经济行为来说，这是符合事实的；对经济理论来说也是如此。关于“世界状态”的概率是被经济学家们正式地使用的，例如在投资组合理论中，它们不可能从随机实验方面得到解释。
>
> （Hicks，1979：105－107）

为了进一步探究这个问题，拿经济学中的一种典型情况来跟物理学中的一种典型情况相比较将会是有帮助的。经济学方面，让我们对尝试建立一个关于某一资本主义经济体的模型的做法进行考虑。在物理学方面，我们会以气体分子运动论为例，将其应用于某一容器中的气体。我之所以选择这两个例子，是因为它们之间有某种结构上的相似性。经济体是由一群从事各种活动的主体构成的，而气体则是由一团以不同的速度四处运动的分子构成的。尽管有这些相似性，但我将会论证表明这两个事例在重要的方面还是存在着差异的。[①]

关键的差异似乎是这样的。分子并不具有知识、意识与决断力，除了偶尔的碰撞，它们大致上是相互独立地运动的。[②]然而，经济主体却是拥有知识、意识、欲望与意志的。此外，他们的活动远非独立的，而是通过他们对彼此间的实际的或期望的抉择的反应来刻画的。

因此，一方面，我们可以在经济方面引入一种置信度解释，但分子显然是不具有信念的；而另一方面，独立性假定对概率的客观解释是必不可少的，但似乎在经济学中并不适用。这一切表明以下结论大有可能，亦即：在气体分子运动论方面，我们需要一种关于概率的客观解释；而在对一个资本主义经济体的分析方面，我们需要一种关于概率的认识论解释。

可能有人会对此表示反对，认为我们通过声称经济主体是有着很强的互动的而分子间是相当独立的，从而夸大了这两种情况的差异。事实上，可能又有人会说，关于气体分子运动论的更为高深的论述要考虑到分子之间的互动，而这可能类似于经济主体之间的互动。[③]为了回答这一点，我们将不得不稍微详细地检视一下概率在气体分子运动论中的角色。

气体分子运动论的其中一个基本的结论是麦克斯韦速度分布定律（Maxwell's law of distribution of velocity），这是麦克斯韦（J. C. Maxwell）在1860年首先得出的。让我们来考虑那团气体在温度为 T 的条件下的体积 V，并假设它包含了 n 个分子。问题就是要去计算速度介于 v 与 $v+dv$ 之间的那些分子的数目 n_v。以某些相当似真的概率性假定为出发点，麦克斯韦得出了定律：

$$n_v = \lambda v^2 \exp(-\mu v^2)\text{，其中 }\lambda\text{ 和 }\mu\text{ 均为常量} \qquad (9.1)$$

这个定律在 1920 年得到斯特恩（M. Stern）的实验检验。我将对他的方法作简要说明，在弗雷泽（R. G. F. Fraser）的著作（Fraser，1931：60 - 74）中可以查到它的全部细节。

一个具有体积 V 和温度 T 的气体样本在某一小室 A 中已被准备好了（图 9.1）。一些分子被允许通过一小孔 O_1 泄漏进第二个小室 B。第二个小孔 O_2 使这些分子缩窄为一道分子束进入到第三个小室 C 中。如果在 A 中的分子遵循麦克斯韦速度分布定律，那么，那些在分子束中的分子则会遵循相关的定律：

$$n_v = \lambda v^3 \exp(-\mu v^2) \tag{9.2}$$

斯特恩使用了一些巧妙的方法去测度该分子束中的速度分布，而且实际上所得出的结果也与麦克斯韦定律的预测，亦即与式 9.2 符合得很好。

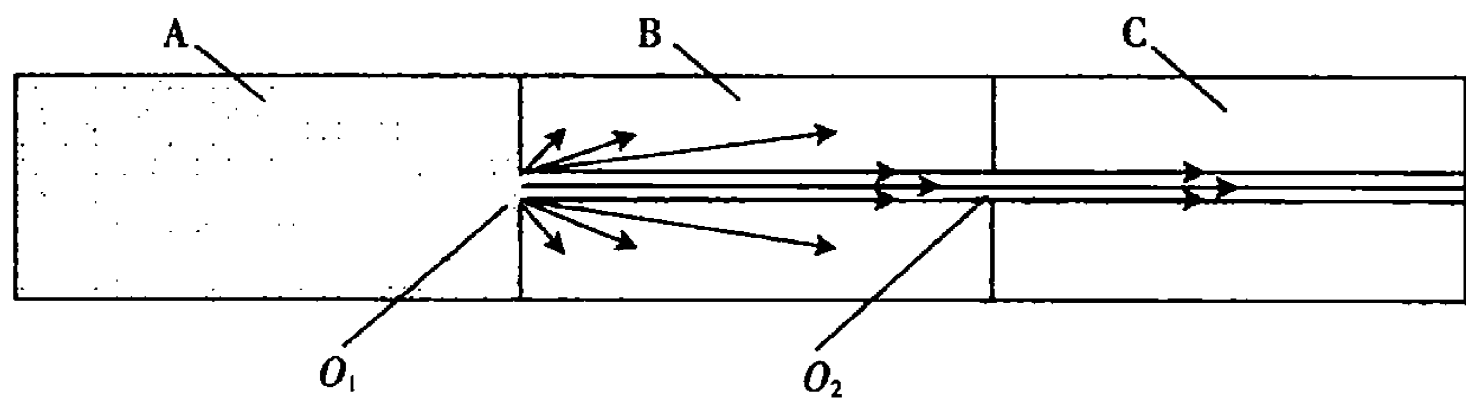


图 9.1　斯特恩通过实验来检验麦克斯韦速度分布定律的装置

在此要指出的一点是，由斯特恩的实验的各次独立的重复实施所构成的序列是极为有可能存在的。那个实验可以在不同的日子在同一个实验室进行，也可以在相同的日子在不同的实验室进行，而这些重复实施都将是独立的。可见，之前所指出的引入客观概率的必要条件得到了满足；的确，我们可以把气体分子运动论中的概率视为客观的。

要注意的另一点是，即使我们通过引入分子间的互动而将气体分子运动论复杂化，这也继续成立。我们已经论证表明，独立性对于客观概率是必要的，但这种独立性不必是分子的各种运动的独立性，因为即使分子之间存在互动，我们仍然可以获得全都具有相同体积和温度的同类气体的独立样本。这些独立的样本可以在不同的时间在同一个地点配备，也可以在同一时间在不同的地点配备。在关于资本主义经济体的事例中存在着任何与这些独立的气体样本相似的地方吗？我接下来将论证表明没有，而这就妨碍了在经济学方面引入客观概率。

当然，受控实验在经济学中是极难实施的。然而，我们能否把关于各经济系

统的行为和表现的观察资料作为在条件的独立重现时所采集到的样本来使用，看做类似于斯特恩的实验中与气体相关的样本呢？不同的样本可以取自在不同的时期与同一经济系统有关的数据，或者在一个类似的发展阶段与不同的经济系统有关的数据（例如法国和德国）。

在第一种情况下，如果这些样本都是通过查阅在时间上非常接近的关于那个经济体的一些“简讯”而取得的，那就很难坚称较为近期的表现没有受到先前一些时期的表现的影响了，这样就不能再坚持那些样本的独立性了。如果那些样本是涉及彼此间相隔得足够久远的历史时期的，从而使独立性假定变得似真，那么人们也不大可能得到同质的样本了；这样是会使“实验”变得无效的。在第二种情况下，使用取自截面数据的样本可能依然不能赋予其独立性，因为经济系统从贸易和生产方面来说是趋向于融合的，尤其是因为来自于一个国家的信息流很可能会影响到其他国家的主体的行为。

由此看来，对于一个经济体的状况的某种独立重现，我们是不可能引入一个令人满意的概念了，因而我们在经济学中不能使用客观概率。可能有人会表示反对，说我们借助随机抽样方法可以克服由于缺乏独立的重复事例而引起的困难。在以下文段中，希克斯考虑了一个属于这种类型的例子[④]：

> 当我们正设法寻求一个有待通过抽样而获得的结论时（例如在关于家庭预算的研究中），我们是有可能采取行动去确保样本是随机的，或者至少是适度地随机的；这样我们才有资格使用抽样理论，它（正如已作说明的）是概率演算的一个分支。
>
> （Hicks，1979：120）

这里的问题在于，虽然我们在这些场合中确实有随机性（或独立的重复事例），但它们是通过抽样程序而被引入的，并不存在于实际上正被研究的现实情形之中。相应地，把客观概率引入这样一些场合是不恰当的，因为我们所得的一切都只是固定的和确切的（尽管可能是未知的）频率。

考虑以下简单的例子可以看清楚这一点。假设我们在一块木板上一字排开地挖了六个半球形的小洞，并给它们从 1 到 6 编号。假设有四个白球被安放在 1 至 4 号的小洞中，有两个黑球被安放在 5 号和 6 号的小洞中。没有人会说这种固定的、极为确切的排列包含了任何机会成分或客观概率。

然而，我们可以通过以下方式引入随机抽样：抛掷一颗骰子，若结果为 n，则记下 n 号洞中的那个球的颜色。这会产生一个“白”和“黑”的随机序列。就算某人不能见到那些球本身的样子，但只要有机会获知那种随机抽样策略的结

果，便能推断出白球和黑球在不为所见的排列中的比例。这并不会表明那种不为所见的排列包含了客观概率。在这个例子中，客观概率全都是通过随机抽样程序（掷骰子）而被引入的。

除了所涉及的数目字比较大之外，希克斯所举的关于家庭预算（比方说，在英国）的例子是完全一样的。在任何一个给定的时刻，其预算处于一个给定的范围内的家庭在英国的比例是一个极为确定的数字，尽管它可能是未知的。这是一个频率而非客观概率。通过抽取一个随机的样本，我们可以利用概率的计算结果去估计这个未知的数字，但这些计算结果中的客观概率都是经由随机抽样程序而被引入的，并不存在于正被研究的现实情形之中。因此，希克斯的例子（以及其他类似的例子）并不表明客观概率能够被有效地引入经济学中。

我用以支持把经济学中的概率解释为认识论概率而非客观概率的论据到此就列举完了。通过推广，我们可以得出这样的结论：概率的认识论解释大体上是适用于社会科学的。因此，这正是社会科学区别于自然科学的一个地方，因为自然科学中的概率是客观的。

一些处于这两大学科分界线上的事例给这样一种区分自然科学与社会科学的观点带来了难题。一个例子是关于人口的增长或减少的。生物学研究动物数量的增长或减少，而关于人类这方面的问题也许看来与之相当类似。毕竟人类的有性生殖是跟其他哺乳动物一样的，而且人类的生殖行为确实是有生物学基础的。在这方面，人类的状况是类似于动物的状况的，而且有人可能会认为：关于人口的增长或减少的问题本质上是一个生物学问题，因而属于自然科学的一部分。然而，也有反对意见认为：不可否认的是，在决定人口的增长或减少方面政治性和（或）经济性的社会因素确实是发挥了作用的。近期的一个明显的例子就是当今中国所推行的一孩政策。这是出于以提高一般中国民众的生活标准为目的的政治考量而由国家推行的政策。这一切根本是与生物学无关的，但毋庸置疑的是，该政策对中国的人口规模产生了影响。有时候经济因素会以一种不那么明显的方式产生大致相同的影响。因此，这似乎是一条一般规律：当国家达到工业化的较高水平时，出生率就会下降，即使普通家庭变得比较富裕，大概可以供养比以往要多的孩子。可见，意大利目前的出生率实际上还是要低于中国的，即使意大利没有“一孩”的家庭政策，即使意大利人过去是以喜欢孩子和大家庭著称的。

医学是另一个处于社会科学和自然科学接合处的例子。一方面，人的身体可被看做一台复杂的生物化学机械装置；疾病可被看做是由这台机械装置的故障造成的，这可能是由于某个内部问题，也可能是由于诸如致病细菌这样的外部实体的侵入。从这种观点来看，医学就是自然科学的分支。另一方面，也有相当真实的事例表明了心灵对于身体的影响。例如，安慰剂确实是有疗效的，即使它们在

化学上是中性的。那么在此，作为一门社会科学的心理学也被牵扯进去了。与心理学同样重要的还有社会学。例如，通过建造排水管道和教育人们养成保持清洁的习惯来改善社会的卫生状况可以迅速减少疾病的产生。又如，引发大规模失业的经济衰退会导致所有类型的疾病的发病率上升。

如果认识论概率适用于社会科学，而客观概率适用于自然科学，那么，关于像医学或人口研究这样的处于分界线上的研究主题，我们还有什么话要说呢？我的答复是，这正好加强了我先前（第八章第二节）所论证支持的观点，即概率解释之间存在着一个从全然主观向完全客观延伸的连续的谱系。虽然概率的认识论解释与客观解释的区分仍然是有用的，但必须谨记，这种区分是在一个在很大程度上是连续统的群体上的划界。因此，有归属不明确的事例存在不应该使我们感到诧异。

让我们更仔细一点地考虑我们那两个处于分界线上的事例。在我看来，人口研究更多地处于社会科学领域而非自然科学领域。历史数据表明，人口的增长率或减少率会随着社会和经济状况的变化而大幅度地变化，而据推测人的生物性仍然是相对固定的。可见，在此，这个问题的最佳研究进路就是把注意力主要集中于社会、政治与经济原因，而把生物基础视为次要的。在医生医治病人方面，情况则正好与此相反。虽然一个病人患某种疾病的概率将取决于相关国家或地区的社会、政治与经济状况，但这个概率在很大程度上可以被降低到背景知识的位置，将不会对医生治疗一个具体的病症产生很大的影响。至于心理方面的因素对关于病人患上某种疾病及其康复的难度的概率的影响——例如安慰剂的影响或病人的信念、精神面貌、压力等的影响，它们已经在统计上得到研究，它们的强度和限度也被了解得相当清楚。因此，医生可以把注意力主要集中于病人的身体状况上，以此作为与疾病相关的关键因素，而把社会和心理因素视为次要的。可见，我会认为，就医治病人的问题而论，医学基本上属于自然科学，因此客观概率应该起到一个重要的作用。[⑤]

到目前为止，我主要从概率论的视角检视了自然科学与社会科学之间的一些差异。现在我想要从更具一般性的角度来考虑该问题，较为具体地说，就是检视索罗斯对于这个问题的看法。这些看法是建基于他对金融市场的分析的，作为一类社会现象，金融市场与自然科学的相隔程度已远得几乎无法再远了。在非人的自然界中，不存在任何像金钱这样的人类社会的创造物，更谈不上有任何类似于证券或金融衍生物市场的东西。由此可推知，金融市场纯粹是属于人类社会的，对它们的分析应该能使我们辨识出社会科学区别于自然科学的某些关键方面。这将是下一节的主题。

第二节 索罗斯论自然科学与社会科学的差别

索罗斯曾是波普尔在伦敦经济学院的学生，现在依然热诚地崇拜波普尔的哲学的大多数观点。然而，有一点他是不同意波普尔的，他对此作出了如下的说明：[⑥]

> 我曾受到卡尔·波普尔关于科学方法的观点的极大影响。我接受了他的大部分见解，但有一个主要的见解例外。他支持他所谓的“方法的统一性”——也就是说，适用于关于自然现象的研究的方法和标准也适用于关于社会事件的研究。我认为这两者之间存在着根本的差别：社会科学所研究的事件包含了有思想的参与者，自然现象并不如此。参与者的思维活动所引发的一些问题在自然科学中没有它们的对应物。
>
> (Soros，1987：11－12)

例如，试想一群自然科学家正在研究天文学。恒星、行星与彗星并不会思考，它们也不可能受到这个群体所提出的任何理论的影响。而当一群社会科学家正在研究金融市场时，情况则相当不一样。参与者在这些市场中的确是会思考的，并且正尝试着去理解他们参与其中的市场。纵然该社会科学家群体本身并没有参与到金融市场中去，它所提出的理论也很有可能会影响到这些市场中未来所发生的变化。可见，这两种场合是大不相同的。正如索罗斯所说：

> 自然科学家比参与者占有一个极大的优势；他们探讨的现象是独立于任何人关于它们的言论或想法而发生的。那些现象属于某一领域，而科学家们的陈述又属于另一领域。那些现象因此充当了借以判断科学陈述的真实性或有效性的独立的客观标准。与事实相一致的陈述就是真的，反之则是假的。在这种一致性得以确立的程度上，科学家的理解才有资格成为知识。我们不必深究妨碍确立这种一致性的各种各样的困难。重要之处在于，科学家们有供他们使用的客观标准。
>
> 相比之下，跟参与者的思维活动相关的情境并不是被独立地给定的：它取决于他们自己的决定。作为用以确立参与者的观点的真实性或有效性的客观标准，它是有缺陷的。它勉强说来也算提供了一种标准：某些预期被随后的事件所证实，而其他的一些则没有。但是证实过程仍然不尽如人意：人们可能永远也无法确定，究竟是预期与随后的事件相一致，还是随后的事件顺

应了预期。在自然科学中普遍存在的思想与事件的分离在此是完全不存在的。

(Soros, 1987: 32-33)

这里有一个有趣的观点：预期有时候可以正确地预测结果，因为它们影响了结果。如此一来，也许会出现这样的情况：投资者们虽然出于不是很充分的理由预期某只股票的价格将会上涨，但是他们因此而大量买入了这只股票，从而导致了它的价格上涨。索罗斯在批评有效市场理论（efficient market theory）的过程中详述了这一点，他自然是不会接受这个理论的。

普遍接受的看法是：市场永远都是正确的——也就是说，市场价格倾向于准确地贴现未来的发展，即使当那些发展是什么尚未明确的时候也是如此。我是从相反的观点开始着眼的。我相信，市场价格对于未来会呈现出一种具有偏向性的态度，在这个意义上，它们总是错误的。但失真在两个方向上都起作用；不仅市场参与者的行动带有偏向，而且他们的偏向还会影响到事件的进程。这有可能造成一种印象，即市场会准确地预测未来，但实际上并不是当前的预期与未来的事件相一致，而是未来的事件是由当前的预期所塑造的。

(Soros, 1987: 14)

索罗斯对自然科学与社会科学的划界是符合我们在那两个事例中对概率解释的讨论的。在上一节，我们将一团气体中的分子与一个资本主义经济体中的人们加以比较。分子并不具有思想和信念，而人们却具有，这正是概率的置信度解释适用于后一种场合但不适用于前一种场合的一个理由。我们当时另一个主要观点是，在气体方面，独立的重复事例是有可能存在的，但这在经济方面是不可能的。虽然这一点没有得到索罗斯的格外强调，但它似乎已暗含在他所说的话当中了。既然一个社会系统是由有思想的参与者构成的，那么任何状况的一次独立重现都将变得困难；因为，假设如果稍后出现的情况在某些方面类似于前面出现的情况，那参与者们第二次就会事先知道将有什么事情发生了，而这很可能会影响到后面那种情况的结果。

索罗斯把量子力学中海森堡（W. Heisenberg）的测不准原理看做是他所认为的社会科学的典型特征在自然科学内的最为近似的比拟。然而，纵然如此，他也认为其中存在着相当大的差异，这在我看来是很有道理的。在海森堡的原理方面，问题只在于，**观察**会影响到研究对象。而在社会科学中，**不仅观察，就连思**

想和信念都会影响到研究对象。正如索罗斯所言：

> ……在量子物理学中，仅仅是观察行为而非测不准理论会干预研究对象，可是对于有思想的参与者而言，他们自己的思想构成了与其相关的研究对象的一部分。自然科学的积极成就局限于思维活动与事件被有效地分离的领域。当事件包含了有思想的参与者的时候，那个领域就会消失得无影无踪。
>
> (Soros, 1987: 33)

索罗斯用来分析包含了有思想的参与者的社会系统的关键概念就是反身性(reflexivity)。这里面的想法是，有思想的参与者在一个社会系统中研究和分析他们的社会情况并形成关于它的信念和理论。这些信念和理论也许充满了差错与误解，事实上也几乎永远都将会如此。尽管它们有着不可避免的缺陷，但这些信念和理论还是会对参与者的行为产生影响，因而有助于塑造那个社会系统的发展方式。社会系统的这种发展反过头来又会影响参与者们关于它的信念和理论，双向影响就这样循环往复着。这整个系统会通过一个持续的相互作用过程而演化下去，索罗斯称这种相互作用为反身性。他是这样来描述它的：

> 这个过程与自然科学所研究的那些过程是根本不一样的。在那里，一组事实接着另一组事实发生，不会受到思想或认识的任何干扰（尽管在量子物理学中观察会引入不确定性）。当一种情境包含了有思想的参与者的时候，事件的序列并不是直接从一组事实导向下一组事实；相反，它以一种类似于鞋带的形式将事实联结于认识又将认识联结于事实。由此，反身性概念便催生出了一种关于历史的“鞋带”理论。
>
> 必须承认，这种鞋带理论就是一种辩证法。它可以被解释为黑格尔的理念辩证法与马克思的辩证唯物主义的一种综合。正是思想与物质条件的相互影响产生出了一种辩证的过程，而不是它们二者独自地以一种辩证的方式演化。
>
> (Soros, 1987: 42-43)

索罗斯批评新古典经济学由于没能认识到反身性因而提出了一种与现实世界不大相干的理论建构。根据新古典经济学，自由市场有一种达至均衡的固有趋势，然而，索罗斯否认存在任何这样的趋势，甚至认为市场会趋向于过剩和失衡。他是这样说的：

通过引入理性行为假定，经济理论试图回避这个问题。人们被假定为通过这样的举措来行事，亦即在可获得的备选项中选出最好的一个，但为人所认识到的备选项与事实之间的区别不知为什么竟被假定掉了。结果就是得出了一种类似于自然科学但却与现实不符的极为简捷的理论建构。它是与一个参与者们在其中依据完备的知识来行事的理想世界相联系的，它还提出了一种理论上的均衡，资源的配置在这种状态下达到最佳效果。它与现实世界是不大相干的，因为在现实世界中人们依据不完备的理解来行事而且均衡是不可企及的。

(Soros，1987：12)

他还说道：

进一步批评均衡概念几乎是多余的。在第一章我就断言这个概念是一个它与现实世界的相关性还有待商榷的假设性概念。在随后的各章中，我检视了宏观经济的发展以及各种各样的金融市场，并表明它们没有展现出朝向均衡的趋势。其实，声称市场趋向于过剩会更有意义一些，过剩迟早会变得不能长期持续下去，因而终究会被纠正。

(Soros，1987：317)

索罗斯在1994年稍微修正了这些观点，他论证表明，尽管反身性在任何时候都有可能出现，但在大多数情况下它小得足以能够被忽略。新古典经济学连带其朝向均衡的趋势都可以被应用到这样的一些情况中。不过，有时反身性也会占据支配地位，那么新古典经济学就变得相当不恰当了。他作出了这样的说明：

在《金融炼金术》中，我提出了反身性理论，好像它始终是与讨论相关似的。作为反身性的标志的双向反馈机制可以在任何时候进行运作，因此在这个意义上那是符合事实的，但是它不会总是在起作用，因此在这个意义上那又是不符合事实的。实际上，在大多数情况下，它是如此的微弱以至于可以被安然地忽略掉。我们可以把接近均衡的条件与远离均衡的条件区分开来。在前者中，某些纠错机制会防止认识与现实出现过度的背离；而在后者中，一种具有反身性的双重反馈机制在发挥作用，认识与现实之间并没有任何要紧密地结合在一起的趋势，除非出现主导条件的重大变化，即整个制度的变更。在第一种情况下，古典经济学是适用的，而认识与现实之间的分歧可以仅仅作为噪声而被忽略掉。在第二种情况下，均衡理论就变得不相干

> 了，我们面对着一个单向的历史过程，认识和现实的变化在此过程中都是不可逆转的。区分这两种不同的事态是重要的，因为在一种事态中是正常的状况在另一种中则是反常的。
>
> （Soros，1994：6）

尽管具有反身性的情况可能只是偶尔而非一直都会出现，但它们正是让索罗斯感兴趣的情况，因为它们给他提供了赚钱的可能性。

可能会有人认为，索罗斯是从他在股市和其他金融市场操作的经验中发展出他关于反身性的想法的，但这并非实情。正如他所说，“我发展出对于反身性的想法是与我在股市的活动无关的。反身性理论开始是作为抽象的哲学思辨出现的，我只是逐渐地才发现它与股价的行为的相关性的。”（Soros，1987：46）这就把我们带到了那个令人好奇的问题面前：波普尔的哲学对索罗斯的商业生涯的影响。索罗斯本人对于这个话题有过这样的说法：

> 我希望表达我对于卡尔·波普尔的哲学的感激。……卡尔·波普尔的哲学对我的整个人生观有一种塑造性的影响。它不仅影响了我的思维，还影响了我的行为。尽管可能看起来不可思议，但它确实对我在商业上的成功作出了实在的贡献……
>
> （Soros，1992：1）

这是很有趣的，因为它与关于哲学生活的流行看法截然相反，那种看法认为哲学生活是脱俗的和沉思的，与商业的实用性形成鲜明的对比。哲学和商业可以比一般所想象的那样有更为紧密的结合吗？为了看看情况是否可以如此，我们值得考虑一下索罗斯的例子。

似乎索罗斯在商业上成功的关键是他的反身性理论。索罗斯（Soros，1987）把这个理论应用于股市，提出了一个在实践中对他很适用的模型。关于这个模型，他说道：

> 我前面概述过的那个粗略的模型在我作为投资者的生涯中已经证明是极为令人满意的。这看起来可能会让人惊讶，因为该模型这么简单，而且它与一个常见的股市模式符合得如此之好，以至于有人可能会料想它是每个投资者都熟知的。不过，实情并不是这样的。为什么呢？部分原因肯定是市场参与者们已经受到了一种不一样的理论建构的误导，那种理论建构源自于古典经济学，而且更为重要的是，还源自于自然科学……

> 我第一次系统地使用该模型是在20世纪60年代末出现跨行业合并浪潮的时期。它使我无论是在市道上扬还是市道下滑的时候都能赚到钱。
>
> （Soros，1987：55－56）

我们看到，索罗斯在此提到他比普通投资者具有双重优势。一方面，他发展了一个基于反身性的颇为现实的模型；而另一方面，受过新古典经济学训练的普通投资者受到了某种理论建构的误导，那种理论建构被索罗斯相当准确地描述为“一种……与现实不符的……理论建构”（Soros，1987：12）。索罗斯本人是曾经在伦敦经济学院受过新古典经济学的训练的。不过，他思想的独立性使他拒斥了那种理论，发展出了更为现实的市场模型。也许在此是得到了波普尔的哲学的帮助，因为波普尔总是强调有需要批判我们的理论并尝试用更好地表征实在的新理论来取代它们。

我对索罗斯的观点的说明到此结束。他那些支持社会科学与自然科学之间存在重要差异的论据在我看来是有说服力的，似乎可以加强前面（本章第一节）所给出的论证。我现在就要用这个论点去解决本书之前谈到的一个关于操作主义的明显的矛盾。

第三节　操作主义适用于社会科学而不适用于自然科学

我在这一章和上一章都论证支持了一种多元主义的概率观，其中所包含的思想是，既认同概率的主观（和主体间）解释，也认同一种客观倾向解释。我们现在必须勇于接受并处理由这种多元主义所引起的一个问题，即主观（和主体间）解释与倾向解释的基础是根本不一样的。

让我们首先来看主观解释。其出发点是把一个特定的人（比方说A女士）的置信度等同于她在具体规定的条件下愿意下赌注打赌的比率（A女士的赌商）。这实际上是关于置信度的操作定义，因而我们可以说，主观理论（及其所衍生的主体间理论）是以操作主义为基础的。事实上（正如在第四章第二节所指出的），弗兰克·拉德于1996年出版的一本名为《操作的主观统计方法》的书是近年来运用主观概率对统计学作出最佳论述的著作，他在阐发主观概率的基础时清楚明确地诉诸操作主义哲学。

另一方面，我在第七章阐述概率的倾向理论的一个长程版本时，我也清楚明确地批评了操作主义，而且主张一种关于概念创新的非操作主义理论。这样一来，如果按我们的多元主义所要求的那样，我们一并接受主观理论和第七章的倾向理论，那么我们显然是既主张操作主义又拒绝接受操作主义。至少可以说，这

是一个尴尬的处境，因而有必要做些什么来解决这个矛盾。

一种解决这个问题的思路见于伽拉沃蒂1995年的文章《操作主义、概率与量子力学》(Operationism, Probability and Quantum Mechanics)。伽拉沃蒂在此表明，主观概率与量子力学大致是在同一时代独立发展的，但它们的发展都在很大程度上依靠操作主义思想。另一方面，像海森堡、玻恩（M. Born）等量子力学的先驱们并没有采纳德·菲耐蒂那种极端的主观主义。这意味着人们可以采纳一种通用的操作主义哲学，但在物理学中持一种客观的操作主义概率解释，在其他领域中又持一种主观的操作主义概率解释。对我来说，这种思路的困难在于，若它被认可的话，则这种客观的操作主义概率解释就是频率理论的某种形式，而不是本书第七章所提倡的那种类型的倾向理论了。因此，我偏爱用另一种方式来解决这个问题。

在本章中到目前为止我已经提出了大意是这样的论点，即社会科学与自然科学之间存在着一些根本的差异。在这种背景下，我现在想要断言：操作主义是与这些差异有牵连的，实际上操作主义适用于社会科学而不适用于自然科学。如果这个断言是真的话，我们的问题就解决了，这是很容易看出来的。概率的主观理论关注于测度置信度，因而属于心理学，而心理学是一门社会（或人文）科学。因此，如果操作主义适用于社会科学，那它也适用于主观概率。倾向理论关注于解释自然科学（例如物理学和生物学）中的概率，因此，如果操作主义不适用于自然科学，那它也不适用于倾向理论。可是，是否存在任何好的理由可以认为操作主义适用于社会科学但不适用于自然科学呢？这就是我们现在必须转而讨论的问题。

通过介绍一个可以使这里相关的争论点变得清楚明了的新例子，我相信这整个问题将就此得以阐明。这是一个关于给试卷评分和划分学位等级的例子。我用以作为具体事例的是与我有关联的一个学位，即伦敦国王学院的哲学与数学学士学位（the philosophy and mathematics undergraduate degree)。攻读这种学位的学生要修读哲学和数学的复合型课程，这些课程全都是用考试来评价的。在哲学考试方面，学生们被要求在标有大约十个涵盖了课程内容的话题的列表中选出三个话题，在三个小时内写三篇关于它们的短文。接下来这些短文按100分为满分来打分，总分再除以3，进而给出一个百分制的分数作为整份试卷的成绩。成绩分四个等级：70+为一级，60～69为二级一等，50～59为二级二等，40～49为三级。40以下为不及格。这里要指出的是，给一篇哲学短文评定一个满分为100的精确分数是一项稍微有点任意的程序。当然了，可能人人都会同意：有些短文是才华横溢的，有些是有见地但呆板的，有些是颇为平庸的，其余的则是极其糟糕的。然而，从这个层面过渡到表明某篇短文值47分，而另一篇则值63分便跨

越了相当大的一步了。尽管如此，但人们还是做了种种尝试去引入一些标准，力图使评分变得没那么任意。每份试卷是由两位校内考官独立地评分的，如果这两位考官不能经由讨论达成一致意见，则争端就要由一位校外考官来解决。尽管两位校内考官之间确实会出现分歧，但也许更为惊人的是，他们的意见常常是近乎一致的。

攻读这个学位要花三年时间，当完成学业的时候，学生们已经参加过很多次的考试了，而他或她的每次考试都会被给予一个分数。我们现在要谈到下一个步骤，即从总体上给学生的学位赋予一个等级。这又同样分为一级、二级一等、二级二等、三级或者不及格。为了得出一个总的等级，显然有必要使用某个公式把所有的考试分数综合起来。最简单的想法就是取学生的所有分数的平均值。然而，不管怎样，这个简单的公式没被采纳。这有两点反对它的理由。首先，第三学年的考试被认为要比第二学年的重要，而第二学年的考试又被认为要比第一学年的重要。因此应该引入权重。其次，不应该由于一两次考试的不好表现而降低了对某个学生的评价，这被认为是对他或她不公平的，因为这些不好的表现可能是由于发挥失常又或者是由于对某一科目或老师的厌恶所造成的。因此，大致说来，总体评价是以学生成绩最好的三个学季为基础的。

然而，问题又来了，事情没有这么简单。假设这个规则被采纳了，即只能拿一个学生成绩最好的三个学季来评定最终的等级。这极有可能会导致一些学生把他们的精力都放在三个学季的课程上而不尽心学习其他课程，因为它们终究是不被计算在内的。为了避免学生们作出这样的一种应对策略，他们的考试成绩最差的一个学季会被赋予一定程度的权重，尽管这个权重在程度上要低于最好的三个学季的权重。

这个时候显而易见的是，那种综合一个学生的分数从而给出一个总的学位等级的公式必定是相当复杂的，而实情也的确如此。此外，伦敦国王学院近来已经改变了评定哲学与数学学士学位的公式。至今一直被沿用的公式叫做 A-score。然而，在 1997 至 1998 学年间经过各委员会的大量讨论以后（类似于前几段所给出的讨论，但更为复杂），学院引入了一个被称为 I-score 的新公式。它将会被逐步分阶段地推广并最终完全取代 A-score。现在，需要指出的有趣的一点是，一个特定的学生——比方说约翰·史密斯——根据以 A-score 为基础的总体评价可能会被授予一级学位，但根据以 I-score 为基础的总体评价则可能会被授予二级一等学位。我对某些用以评定试卷分数和划分学位等级的方法的简短说明就到此结束了。现在我将转而讨论这些社会程序的哲学意义。

我一直在描述的是一些已经得到确立的操作程序，它们使分数和等级既能被指派给各张单独的试卷，又能被指派给作为整体的某一学生的学位。然而，以下

说法是相当难以置信的，那就是，声称在这些程序被引入之前一张试卷和一个学位就具有一个真正的值，而这些程序仅仅是力图测度这个既定的值的一些尝试。争论是 A-score 还是 I-score 能够更好地把握那个关于某一学生的表现的真正的值看来几乎是没有多大意义的，因为对于这样一个可用数字分数来表达的真正的值而言，它的存在本身就肯定可以说是有待商榷的了。事实上，被指派给学位的数值是由一个在操作上可适用的约定创造出来的。当然了，这并不是说该约定是完全任意的。那是有一个关于某种粗略的定性的共识的背景的，因而被选择的数值评估方法只会是与这个背景相符合的。然而，这个要求也给 A-score 和 I-score 等不同的公式留下了相当大的空间。

尽管在引入数字分数和划分等级时存在着无疑相当大的任意性，但这些程序事实上却产生了重要影响。人们可以说，它们改变了社会现实，可谓人人都让一个影响他们社会地位和人生机遇的数字给打上了烙印。让我们再回过头来谈约翰·史密斯，我们假定他在去年毕业，当时伦敦国王学院的哲学与数学学位是依据 A-score 来评价的。他得到了一级学位，他还想继续去念博士研究生。让我们进一步假定，要被某一博士项目接纳需要一个一级学位。约翰·史密斯被接纳了，随后他备受推崇，被称为新弗兰克·拉姆齐。一年以后，安·琼斯完成了她的哲学与数学学位。凑巧的是，她在所有试卷上都正好得到了同约翰·史密斯一样的分数，但现在对学位的总体评价是由 I-score 来计算的，结果她被评定为二级一等而非一级。她原本也是想去念博士研究生的，但是因为她没能得到一级学位，所以她不被那个项目所接纳。于是，她转而成立了一家网络公司，而且还发了大财。我们看到，把 A-score 替换为 I-score 明显是出于任意的决定的，但这样的决定却可以对人们的一生产生极为深远的影响。

但是，为什么非要给学位引入用数字表示的值和精确的分类呢？答案很简单。这样做是由于来自雇主方面的强大压力。雇主们不得不对雇用哪个毕业生做出决定，而一个关于毕业生在攻读学位期间的表现的简单的总体概括是有助于他们做出决定的。当然了，批判现代社会的人会表示反对，说这整个程序是令人高度异化的。为了能被塞进一个狭窄的、单向度的体系，一个具有各种各样不同的能力和弱点的复杂的、多面的人就被归约为了一个单独的数字或等级。“无疑，”我们的批评家可能会说，“这就是异化。”我是倾向于赞同这种看法的，但我会增加以下悲观的评注，即这样的异化在目前的社会状况下可能是必然的。

现在回到概率的问题上来，我们可以看到，依据赌商给一个人的置信度指派数值是一种非常类似于给一个人的考试表现指派一个数字分数的程序。在这两种情况中，最初都有可能存在着一个粗略的和定性的评价。然后一种操作程序就被引入，用来把它转变为一个以数字表示的值。尽管这种程序是相当任意的，但它

对于某些目的来说是有用的。在考试方面，它有助于未来的雇主选择他们的员工。在概率方面，它使适用于数学概率的强有力的技巧能被用来处理置信度。然而，在这两种情况中，把一个复杂的实在事物归约为单个数字的做法也许应该要受到某种程度的质疑。

另外要指出的一点[7]是，指派主观概率的方法具有一种规范性。为了使置信度保持一致，如果有必要的话，同意在具体指明的条件下参与打赌的人们是被鼓励去改变他们的置信度的。这就使主观概率与自然科学方面的事例——比如说用温度计测量温度——区分了开来。液体并不会由于这样一种测量过程而做出一个调整它们的沸点的合理决定。

这样，我们看到，评价考试结果的问题与评价置信度的问题是有许多共同点的，而且这些共同的特征往往会出现在社会生活的其他领域。操作主义提供了一种很好的或者至少说是令人满意的方式去处理这样一些情况，因而是适用于社会科学的。接下来我会论证表明，自然科学所应对的状况与此是不一样的，其差异之大足以使操作主义不再适用。

自然科学中的出发点也是与之相同或相似的。无论人们考虑的是空间关系、冷热现象还是物理客体的大小和密度，都必须是以粗略的定性评价作为开始的。然而，为了处理这些现象，理论于是逐渐发展了起来，根据理论，这些定性现象可以用简单的定量参数来解释。因此，对于空间关系，有欧几里得几何学及其关于长度（l）和角度（θ）的参数。对于冷和热，有依据温度（T）而得以确立的一些理论。对于物理客体，有牛顿力学及质量（m）这个参数。这些理论都经过了充分的检验并被查明是行之有效的，于是它们可以被用来设计一些用以测度那些相关参数（l，θ，T 或 m）的方法。这种程序就是本书第七章所给出的关于自然科学中的概念创新的非操作主义的说明的基础。人们可以说，社会科学中正是缺乏成功的定量理论才会使得有必要引人操作主义的程序以作为一种可供选择的使定性的东西定量化的方式。

我将举出最后一个专门用来阐明社会科学与自然科学之间的这种差异的例子，以此结束我的论述。在社会科学方面，让我们以对于股市的行为的分析为例。乍看起来股市呈现出完全定量的面貌。每一只股票在给定的时刻内都有一个极为确定的用数字表示的价格，这些价格会以某种方式随着时间的变化而变化，这种变化方式可以用电脑屏幕上的各种线来精确地表征。然而，进一步的考虑表明，确定这些看似精确的数字的方式与确定考试成绩的方式没有什么不同，而且包含了很多任意的成分在里面。说实在的，考试分数是由考官们遵循着那些依他们的惯例而确立的规则所决定的，而在股市中，股票价格是由成千上万投资者的买进或卖出的抉择所决定的。不过，这些投资者的抉择根本就不是独立的。投资

者之间是相互影响的，在任何给定的时刻，一个可以在很大程度上决定股价的约定性的共识都有可能突现。这个约定性的共识是自发产生的，无须经由来自一个控制机构的任何明确的决定，可是它却与那些在考官们指派分数时指引他们的约定有着大致相同的效用。

最为成功的两位股市理论家是凯恩斯（Keynes，1936：Chapter 12，147－164）和索罗斯（Soros，1987/94：Chapter 2，46－68），他们在理论上和实践上都取得了成功。有趣的是，与这个领域的其他研究者不同，他们两位都避免使用数学，而对于股市是如何运作的，他们都只提出定性的说明。人们可以说，表面上股市是定量的，但实际上它在性质上却是定性的，它是由成千上万的投资者基于定性的须考虑因素在不确定的条件下所做的决定推动向前的。

这种情况可以与物理体的机械性行为形成对照。任何环顾四周去观察树叶落到地面上、大铁锤敲碎石头、瀑布飞溅出水花等现象的人最初都可能会对纷繁复杂的定性现象感到震惊。地球物理学的任何现象都不像股票那样，有与之相联系的数字伴随着。事实上，亚里士多德的《物理学》（*Physics*）就是从纯粹定性的角度来分析所有这些现象的，很多世纪以来他的理论都被认同是最具权威性的。不过，牛顿力学的兴起和成功表明，所有这些现象都可以被归约为数字和数学。在这里，表象是定性的，实在原来倒是定量的。

我们可以这样总结说：毕达哥拉斯主义对于物理学来说是一种富有成效的哲学，但对于社会科学来说却是一种误导人的哲学。

注　释

第一章　对各种解释的导引性简介——若干历史背景

①有一些极好的著作探讨了概率论在这个时期的发展史。而我个人的论述主要基于以下四本专著：Todhunter（1865）、David（1962）、Hacking（1975）以及 Daston（1988）。前两本主要涉及数学方面的发展。托德亨特（I. Todhunter）的书介绍得十分全面，而戴维（F. N. David）的书则更具可读性，并且其附录 4 还附有帕斯卡和费马的通信的英语译文。哈金（I. Hacking）与达斯顿（L. Daston）的书也谈到了一些数学问题，但更为专注于哲学方面的内容。当然，他们在某些问题上是存在分歧的，这也是很自然的事情。而我会在第二章对其中一个问题作出讨论。

②本书有一些等式会根据它们所在的那一章的序数被标上编号，例如，3.1，3.2，以此类推。但为了简单起见，并非所有的等式都如此。

③此公式读做："当 n 趋于无穷大时，$(p-r/n)$ 的绝对值小于 ε 的概率趋于 1。" 熟悉数学分析的人都会明白这个公式的精确含义。但若换成如下说法，即 "随着 n 变得越来越大，该概率愈发接近 1"，则可让没有学过这门数学分支学科的人也完全能理解它。概率逼近其极限 1 的速度被称为收敛速度。图 1.1 给出了一个概率分布在 $n\rightarrow\infty$ 时向其极限收敛的图示。

④为了阐明二项分布趋向正态分布的方式，有必要运用一些数学变换的手段。假设我们正抛掷一枚硬币，它落下后正面朝上的概率 $Prob$（正面朝上）$=p$，并且在 n 次抛掷中出现 r 次正面朝上。这样，$Z=$ 正面朝上的相对频率（r/n）便有以下的二项分布：

$$Prob(Z=r/n)=C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$$

它有均值 p 和标准差

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

为了方便起见，让我们考虑 Z 的标准化变量

$$X=\frac{\frac{r}{n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

当 $n\to\infty$ 时，X 的分布趋于具有零均值（$\mu=0$）和单位标准差（$\sigma=1$）的正态分布。这一点可以通过作图来说明：对于给定的 n，p 与 $r=0$，1，…，n，我们先在 x 轴上标出 X 所有可能的取值，然后沿着 y 轴的每一点描画出乘以了 $\sqrt{np\ (1-p)}$ 的二项分布。这是一个按比例变化了的二项分布，它与具有零均值和单位标准差的正态分布形成对照，因为有极限定理表明：

$$\sqrt{np(1-p)}C_n^r p^r(1-p)^{n-r}\to\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{x^2}{2})$$

在图 1.1 中，分布图是根据 $p=0.6$，$n=5$ 和 $p=0.6$，$n=30$ 所绘制的。我十分感谢我的儿子马克·吉利斯（Mark Gillies）制作出这些电脑图形。值得注意的是，当 n 为 30 时，尽管 30 对于 n 来说是一个较小的值，但二项分布的正态近似的效果非常好。要想进一步了解棣莫弗定理的两种证明（一种所运用的是现代的方法，而另一种则较接近于棣莫弗原来的方法）在数学方面的细节，请参见 Cramér（1946：198－203）。

第二章　古典理论

①第四章将对概率公理作出全面的说明，包括对“有限可加性”的意思的解释。

②这个反对的理由是托尼·戴尔（Tony Dale）博士在同我交谈时所提出的。

第三章　逻辑理论

①大约在最近的 15 年间出现了大量关于这个时期的剑桥的学术著作，十分有助于人们理解当时剑桥的各种思想倾向。我觉得 Bateman（1988，1996）、Davis（1994），Monk（1990，1996）以及 Skidelsky（1983，1992）这几本著作对于我在本章中对相关内容的撰写是大有裨益的。此外，我还受益于 Childers（1996），因为这本书有几章是论述概率的逻辑理论的，凯恩斯和卡尔纳普的版

本都有涉及，对我很有帮助。

②若要更为详尽地了解摩尔和凯恩斯在柏拉图主义和直觉方面的异同，请参见 Davis（1994：10－28）。

③欲了解更多的细节，请参见 Keynes（1921）。

④这个例子是我在某一场合作这个专题的讲座时由一位听众提出的。

⑤Gillies（1987）为支持这一说法而作出了详尽的论证。

⑥此处所给出的介绍是粗略的，其目的只在于举例说明玻色和爱因斯坦的论证的一个关键特征。欲了解涉及数学细节的详尽说明，请参见——例如——Born（1935：268－276）。

第四章　主观理论

①对拉姆齐的这些批评所作的一个很好的论述见于 Cottrell（1993：30－32）。

②这个打赌场景中的女主角与男主角是以塞缪尔·理查逊（Samuel Richardson）于1740年出版的小说《帕梅拉；又名美德有报》（*Pamela*；*or*，*Virtue Rewarded*）的两位主人公的名字命名的。帕梅拉·安德鲁斯（Pamela Andrews）（A女士）是B先生（该小说始终都是这样称呼他的）家中的一个女仆。非常富有的B先生想方设法要诱奸帕梅拉，但她洁身自好，拒绝了他的威逼利诱，并使他最终决定要娶她为妻。这部小说在其问世的时代是一本畅销书，而且对欧洲文学的发展产生了巨大的影响。可以推测，在理查逊的小说背景之下，确定B先生对各种各样的命题的置信度，对于A女士来说，肯定是很重要的。

③欲了解更为赞同拉姆齐的观点的一个对于金钱与效用孰优孰劣的问题的有趣探讨，请参见 Sahlin（1990：41－43）。

④以下的证明是以 de Finetti（1937）为根据的，但又有所扩展，在细节上作了一定的补充。一个较简短但在数学上更为复杂的证明见于 Paris（1994：19－23）。

⑤这是拉迪斯拉夫·克瓦茨（Ladislav Kvasz）向我指出的。

⑥一个对他在关于有限可加性与可列可加性的问题上的观点的详尽说明见于 de Finetti（1970），我在我对该书的书评中讨论了这些观点（Gillies，1972b：142－145）。在那篇文章里，我参阅的是德·菲耐蒂的书的意大利文原版，但在这里我下面所引用的是1974年问世的英译本。

⑦我是从 Popper（1957a）的打字稿版本得知这个例子的，当我于1966至1968年间在伦敦经济学院念研究生的时候，该书的这个版本正在校园里流传。波普尔考虑了一种情况，在这种情况中，太阳已经接连不断地升起了1000000

次，但接下来却有 10 天没有升起。他就是以此从总体上批评主观的学习理论（subjective theory of learning）太过看重以往的经验，从而使我们的观念的修正变得几乎不可能。尽管差不多所有的打字稿都被转印到 Popper（1957a，1983）上，但让人颇为奇怪的是，这个例子竟被删去了。一个可能的理由就是，该例子并不能有效地用来反对主观的学习理论的所有版本。正如豪森和乌尔巴赫所指出的（Howson and Urbach，1989：81），由于遭到反驳的假说所获得的概率是 0，所以在此意义上，贝叶斯主义蕴涵证伪主义。接下来让我们考虑主观贝叶斯主义的一个版本，在某种意义上，它与对一般规律的学习有关，因为它试图根据经验给这样的规律指派概率。这样的一种进路会以接连不断的 1000000 次日出为根据而给“太阳每天早上都升起”这个普遍规律指派一个概率。然而，在出现了第一次的失败以后，这个概率就会跌至零。可见，波普尔的例子并不是一个可以用来反对主观的学习理论的所有版本的好论据，但正如我将在下面表明的，它作为反对接续规则的论据，的确能产生非常强的说服力。

⑧“红或蓝”游戏在 Feller（1950：67－95）一书里有所描述，这本书还对它那些稀奇古怪的性质作了一个有意思的数学分析。波普尔就是在费勒的著作中看到这个游戏的，而且他曾有过用它来反对各种归纳理论的构想。波普尔用了这个游戏来批评他所谓的“简单归纳规则”（the simple inductive rule）（Popper，1957a：358－360；重印于 1983：301－305），甚至随后他还用这个游戏去尝试证明构造一个归纳逻辑的不可能性（Popper，1957a：366－367，重印于 1983：323－324）。这两个论证的第一个在我看来是合理的，我已经对它进行了改造，使我在此可以用来提出对德·菲耐蒂的可交换性归约的批评。波普尔的第二个论证在我看来是不那么令人信服的，因为，我们完全有可能设计出一个能够适应像“红或蓝”游戏这种场合的归纳逻辑。其实，对于构造一个归纳逻辑的可能性，我早就给出了支持的论据（Gillies，1996：98－112）。

⑨艾伯特的论证的数学部分见于 Albert（1999），其中的定理 1 就是这里所说的怎么都行定理（Anything Goes Theorem）。这个论证涉及较多哲学内容的部分很快也会被刊载出来。我非常感谢马克斯·艾伯特（Max Albert），他给我寄来了一份充分地讨论了该论证的数学和哲学两方面的未发表的打字稿，而且对于这个问题以及它与涉及“红或蓝”游戏的那个论证的关系，他也与我进行了一些有助益的讨论。

⑩一个对于约翰逊对这个问题的贡献的有意思的说明见于 Zabell（1989）。

⑪德·菲耐蒂最初使用“等值的”（equivalent）这一术语（意大利文为 equivalente），但是“可交换的”（exchangeable）现在已经成为标准的术语了。

第五章　频率理论

①对马赫给质量所下的操作定义的一个批判性说明见于 Gillies（1972a）与 Gillies（1973：37－47）。后一个参考文献给出了更多关于马赫与冯·米泽斯之间的关系的细节。

②以下证明基于乔恩·威廉森（Jon Williamson）对我的启发。我十分感谢他在这个问题上对我的帮助。

第六章　倾向理论（一）：概述

①波普尔最早是在布里斯托大学（University of Bristol）的一个会议上提出倾向理论的。然而，由于他未能亲自参会，所以他的文章（Popper，1957b）是由他当时的学生保罗·K. 费耶阿本德（P. K. Feyerabend）宣读的。

②令我感到遗憾的是，由于篇幅有限，这使得我不能详细地讨论包括 Hacking（1965）和 Mellor（1971）在内的其他一些对该领域起过重要促进作用的著述。欲了解对于倾向理论的梅勒（D. H. Mellor）版本的讨论，请参见 Salmon（1979）。

③关于这个话题，请参见 Fetzer（1993）。

④这是大卫·科菲尔德（David Corfield）和乔恩·威廉森向我指出的。

⑤弗兰西斯卡确实拥有了她的低座小摩托车，而且自从 20 世纪 80 年代中期以来，她骑着它在罗马各处转悠，没有发生过一次事故。这可能是读者有兴趣知道的。

⑥是拉迪斯拉夫·克瓦茨启发我想到这个论据的。

⑦至少从我抛掷硬币的经验来看是这样的，但是大卫·米勒向我保证说有一种抛掷硬币的机械装置每次都肯定可以掷出正面朝上。我还没见过这样一台装置，无法亲自核实这种说法。

⑧这实际上就是我在我 1973 年的著作《一个客观的概率理论》（*An Objective Theory of Probability*）中所持的立场。那本书所阐发的那个理论是客观的且非频率的，但我当时却反对把它叫做倾向理论，这在一定程度上是因为它在某些方面是不同于波普尔的理论的。事实上在那个时候，甚至是对于波普尔本人的观点，我仍然有某些关于“倾向”这个术语的用法的总体上的疑虑（参看 Gillies，1973：149－150）。然而，随后“倾向”这个术语在文献中得到了广泛的接受，它已经开始具有一个比较宽泛的意义，用以意谓一种关于概率的客观的但非频率的观点。因此，我现在把我早期的立场重新归类为倾向理论的一种特定的样式。在我的书问世以后，我在这点上曾与波普尔有过一些讨论。有意思的是，波普尔

是赞同在笼统的意义上来使用“倾向”这个术语的，而不是专门用来指称他自己的观点。

⑨显然这组公理通常会是柯尔莫哥洛夫公理，不过，我们将会看到，在倾向理论的某些版本中，特别是费策尔的版本中，倾向并不满足柯尔莫哥洛夫公理但满足别的一组公理。在我自己的进路（见于本书第七章）中，倾向满足柯尔莫哥洛夫公理，但也可以通过增添一条附加的公理而得到进一步的刻画。

⑩长程倾向理论与单例倾向理论的区分援引自 Fetzer（1988：123，125 - 126）。然而，我现在是在与费策尔略微不同的意义上使用着同一个术语的。费策尔是拿“长程”来指称无限的序列的，而我也早已解释过，我是用“长程”来指称很长但仍然有限的重复事例序列的。

第七章　倾向理论（二）：对一个特定的倾向理论的阐述

①关于这一节中的观点的比较全面的叙述见于 Gillies（1972a，1973：37 - 74）。

②对于该断言的一个详尽的历史辩护见于 Gillies（1972a：8 - 11，或 1973：48 - 50）。

③Rutherford（1951：66 - 71）给出了这个结果的一个证明。

④这篇文章重印于 Popper（1983：132 - 146），有轻微的改动。

⑤Gillies（1971，1973，Part 3：161 - 226）对关于表述一个针对概率陈述的证伪规则和细察它与统计工作的惯常做法的一致程度的问题在数学细节方面作了更多的讨论。我在此之所以给出一个较为简洁和非形式化的说明，一方面是为了使所用到的数学尽可能地简单，但另一方面也是因为我想在本书中把重点放在概率哲学上而不是放在关于统计学基础的问题上——尽管它们都是些重要和根本的问题。

然而，在细察这里所提出的一个 FRPS 与统计工作的惯常做法之间的一致程度时，所涉及的诸多复杂问题并不仅仅是数学方面的，因为关于什么应该被视为统计工作的惯常做法也存在着分歧。正如我在文中所谈到的，大部分统计学家确实不明言地使用着方法论上的证伪主义。豪森和乌尔巴赫为支持把贝叶斯主义作为可供替代的处理方式而作出论证，实际上他们甚至提议说，常见的统计工作的标准做法大多都应该被摒弃掉。因此，他们在提及费希尔、内曼与皮尔逊等人时写道：

> 说句公道话，他们的理论，尤其是那些与显著性检验和估计有关的理论构成了所谓的经典统计推断方法的主要部分，并在该领域取得了卓越的成

就。他们所推荐的实验设计和数据分析的程序已经成为许多科学家所持有的正确性的标准。

在接下来的各章我们将表明，尽管这些经典方法在哲学家和科学家中间有影响，但他们真是相当不成功，因而他们的卓越成就是名不副实的。

(Howson and Urbach, 1989: 11)

诚如他们所言，豪森和乌尔巴赫在他们的著作其后的三章中对标准的统计检验理论展开了全面的批评（Howson and Urbach, 1989: 121 - 176)。在我对他们的书评中我用了相当多的篇幅（Gillies, 1990: 90 - 98）去尝试回应这些反对意见，并论证表明统计检验的标准方法不大可能会被放弃。

Albert (1992) 是近期对关于证伪主义和统计推断的问题作出最重要贡献的论文。除了别的方面，它还包含了根据这种观点所作的一些关于卡方检验的宝贵评论。

第八章　主体间概率与多元主义的概率观

①是 D. V. 林德利（D. V. Lindley）教授（通过私人通信）启发我想出这个证明的。

②欲了解对于经济学的应用，请参见 Gillies (1988b)、Gillies 和 Ietto-Gillies (1991)。欲了解对于科学假说的认证的应用，请参见 Gillies (1991)。

③这一点重要的看法是我和拉迪斯拉夫·克瓦茨在就关于从主观到客观的谱系的问题所进行的一次很长和极为有益的讨论的过程中他向我表明的。拉迪斯拉夫·克瓦茨还向我提供了图 8.1 和图 8.2 的插图。

第九章　多元主义的例证：自然科学与社会科学之间的种种差异

①Farjoun and Machover (1983) 对一个由数以百万计的人所构成的经济体与一团由数以百万计的分子所构成的气体进行了比较并有所讨论，尤其是在它的第二章“一个范式：统计力学”(A Paradigm: Statistical Mechanics)。然而，法尔容(E. Farjoun) 和麦克弗（M. Machover）的观点与本书在此所表达的观点是不同的。正如其著作第二章的标题所暗示的，他们把物理学方面的事例（统计力学）看做一个用以研究经济系统的适宜的模型。此外，他们用统计力学作比拟，事实上也的确发展了自己的经济理论。然而，我将论证表明那两种情况是不同的，尤其要表明的是，它们涉及不同的概率概念。

②下面很快我就会考虑到其中存在着某种分子间的互动的情形。

③法尔容和麦克弗使用了一个这种类型的论点，他们写道：

> 事实上，统计力学的发展已经表明，这样一个系统的宏观行为对其粒子间的微观互动的精确性的依赖要小得惊人——甚至比麦克斯韦和玻尔兹曼所设想的都要小得多，它更多地取决于以下事实，即该系统本身是由非常多的组成部分所构成的，而且从微观上讲，拥有非常多的“自由度”。
>
> (Farjoun and Machover，1983：55－56)

④一个类似的事例是在交谈中莫什·麦克弗启发我想到的。

⑤尤其是，医疗专家系统是可以使用客观概率的一个领域。欲了解第七章所论述的倾向理论在这样的一个系统中的应用，请参见 Sucar *et al.* (1993)。

⑥索罗斯的《金融炼金术》(*The Alchemy of Finance*) 一书在 1987 年出了第一版，又在 1994 年出了第二版。相应地，该书在参考书目中被表示为“Soros，1987/1994”。在正文中，摘录自初版内容的引文将会被表示为“Soros，1987”，而摘录自 1994 年所增添的新前言的引文则会被表示为“Soros，1994”。这个约定有利于表述的清晰性，因为正如我们将要看到的，索罗斯在新前言中对其著作的初版作了评论，并在若干方面修正了他先前的看法。

⑦我的这点想法要归因于张下涑 (Hasok Chang)。

参 考 文 献

一般说来，我会标明所引著作的初版年份，但同时会明确指出作为引文的出处的确切版本，如果它不同于初版的话，我还会给出它的年份。偶尔我也会给出某一作品可以在其中被查找到的两个出处。在这种情况下，正文中的引文是摘录于第一个出处的，但之所以增加第二个出处，是因为它可能更容易被读者接触到。只要有可能，我都会引用外文著作的英译本。

[1] Adams, E. (1964) 'On Rational Betting Systems', Archiv fur Mathematische Logik und Grundlagenforschung, 6: 7-29, 112-28.

[2] Albert, M. (1992) 'Die Falsifikation Statistischer Hypothesen', Journal for General Philosophy of Science, 23: 1-32.

[3] Albert, M. (1999) 'Bayesian Learning when Chaos looms large', Economics Letters, 65: 1-7.

[4] Ayer, A. J. (1963) 'Two Notes on Probability', in The Concept of a Person and other Essays, Macmillan: 188-208.

[5] Bacon, F. (1620) Novum Organum, English translation in R. L. Ellis and J. Spedding (eds.). The Philosophical Works of Francis Bacon, Routledge, 1905: 212-387.

[6] Bateman, B. W. (1988) 'G. E. Moore and J. M. Keynes: A Missing Chapter in the History of the Expected Utility Model', American Economic Review, 78: 1098-1106.

[7] Bateman, B. W. (1996) Keynes's Uncertain Revolution, University of Michigan Press.

[8] Bayes, T. and Price, R. (1763) 'An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances', reprinted in E. S. Pearson and M. G. Kendall (eds.). Studies in the History of Statistics and Probability, Griffin, 1970: 134-53.

[9] Born, M. (1935) Atomic Physics, Blackie, 7th Edition, 1966.

[10] Cantelli, F. P. (1935) 'Consideration sur la convergence dans le calcul des probabilites', Annales de l'institut Henri Poincare, V: 1-50.

[11] Carnap, R. (1950) Logical Foundations of Probability, 2nd Edition, University of Chicago, 1963.

[12] Childers, T. (1996) 'On the Relation between the Normative and the Empirical in the Philosophy of Science', unpublished PhD thesis, University of London.

[13] Church, A. (1936) 'An unsolvable problem of elementary number theory', American Journal

of Mathematics, 58: 345 -63.

[14] Church, A. (1940) 'On the concept of a random sequence', Bulletin of the American Mathematical Society, 46: 130 -5.

[15] Cottrell, A. (1993) 'Keynes's Theory of Probability and its Relevance to his Economics. Three Theses', Economics and Philosophy, 9: 25 -51.

[16] Cox, D. R. and Miller, H. D. (1965) The Theory of Stochastic Processes, Methuen.

[17] Cramer, H. (1946) Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1961.

[18] Czuber, E. (1903/1908 - 10) Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlersausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Teubner.

[19] Daston, L. (1988) Classical Probability in the Enlightenment, Princeton University Press.

[20] David, F. N. (1962) Games, Gods and Gambling. The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era, Harper.

[21] Davis, J. B. (1994) Keynes's Philosophical Development, Cambridge University Press.

[22] de Finetti, B. (1930a) 'Fondamenti Logici del Ragionamento Probabilistico', Bollettino dell' Unione Matematica italiana 5: i -3. Reprinted in De Finetti, 1981a: 261 -263.

[23] de Finetti, B. (1930b) 'Funzione Caratterisfica di un Fenomeno Aleatorio', Memorie della Reale Accademia del Lincei IV, 5: 86 - 133. Reprinted in De Finetti, 1981a: 267 -315,

[24] de Finetti, B. (1930c) 'Problemi Determinati e Indeterminati nel Calcolo della Probabilità'. Rendiconti della Reale Accademia Nazionale del Lincei XII, 9: 367 -73. Reprinted in De Finetti, 1981a: 327 -333.

[25] de Finetti, B. (1931a) 'Probabilism', English translat ion in Erkenntnis, 1989, 31: 169 - 223.

[26] de Finetti, B. (1931b) 'On the Subjective Meaning of Probability', English translation in De Finetti, 1993: 291 -321.

[27] de Finetti, B. (1936) 'Statistics and Probability in R. Von Mises' Conception', English translation in De Finetti, 1993: 353 -64.

[28] de Finetti, B. (1937) 'Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources', English translation in H. E. Kyburg and H. E. Smokier (eds.). Studies ia Subjective Probability, Wiley, 1964: 93 - 158.

[29] de Finetti, B. (1938) 'Cambridge Probability Theorists', English translation in The Manchester School of Economic and Social Studies, 1985, 53: 348 -63.

[30] de Finetti, B. (1970) Theory of Probability. vols 1 and 2, English translation. Wiley. 1974.

[31] de Finetti, B. (1981a) Scritti (1926 - 1930), Cedam: Padua.

[32] de Finetti, B. (1981b) 'The Role of "Dutch Books" and "Proper Scoring Rules"', British Journal for the Philosophy of Science, 32: 55 -56.

[33] de Finetti, B. (1991) Scritti (1931 - 1936), Pitagora: Bologna.

[34] de Finetti, B. (1993) Induction and Probability, Clueb: Bologna.

[35] de Finetti, B. (1995) Filosofia della Probabilitd, II Saggiatore.
[36] Dostoyevsky, F. M. (1866) The Gambler, English translation in Penguin Classics, 1976.
[37] Duhem, P. (1904 – 5) The Aim and Structure of Physical Theory, English translation by Philip P. Wiener of the second French edition of 1914, Atheneum, 1962.
[38] Earman, J. and Salmon, W. C. (1992) 'The Confirmation of Scientific Hypotheses', in M. H. Salmon et al. (eds.). Introduction to Philosophy of Science. Prentice Hall, Chapter 2: 42 – 103.
[39] Edwards, A. W. F. (1978) 'Commentary on the Arguments of Thomas Bayes', Scandinavian Journal of Statistics, 5: 116 – 118.
[40] Farjoun, E. and Machover, M. (1983) Laws of Chaos, Verso.
[41] Feller, W. (1950) Introduction to Probability Theory and Its Applications, Third edition, 1971, Wiley.
[42] Fetzer, J. H. (1981) Scientific Knowledge: Causation, Explanation. and Corroboration, Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 69, D. Reidel, Dordrecht.
[43] Fetzer, J. H. (1982) 'Probabilistic Explanations', PSA 2: 194 – 207.
[44] Fetzer, J. H. (1988) 'Probabilistic Metaphysics', in J. H. Fetzer (ed.). Probability and Causality, D. Reidel: 109 – 132.
[45] Fetzer, J. H. (1991) 'Critical Notice: Philip Kitcher and Wesley C. Salmon, (eds.). Scientific Explanation; and Wesley C. Salmon, Four Decades of Scientific Explanation. Philosophy of Science', PhUosophy of Science, 58: 288 – 306.
[46] Fetzer, J. H. (1993) 'Peirce and Propensities', in Edward C. Moore (ed.). Charles S. Peirce and the Philosophy of Science, University of Alabama Press: 61 – 71.
[47] Fisher, R. A. (1925) Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd.
[48] Fisher, R. A. (1935) The Design of Experiments, Oliver and Boyd.
[49] Fleck, L. (1935) Genesis and Development ora Scientific Fact, English translation, University of Chicago Press, 1981.
[50] Fraser, R. G. E. (1931) Molecular Rays, Cambridge University Press.
[51] Fry, T. C. (1928) Probability and its Engineering Uses, Van Nostrand.
[52] Galavotti, M. C. (1989) 'Anti-Realism in the Philosophy of Probability: Bruno de Finetti's Subjectivism', Erkenntnis, 31: 239 – 261.
[53] Galavotti, M. C. (1991) 'The notion of subjective probability in the work of Ramsey and de Finetti', Theoria LXII, (3): 239 – 259.
[54] Galavotti, M. C. (1994) 'F. P. Ramsey and the Notion of "Chance"', Proceedings of the 17th International Wittgenstein-Symposium (Kirchberg am Wechsel, 14: 21 August 1994): 330 – 340.
[55] Galavotti, M. C. (1995) 'Operationism, Probability and Quantum Mechanics', Foundations of Science, 1: 99 – 118.

[56] Galavotti, M. C. (1999) 'Some Remarks on Objective Chance (E P. Ramsey, K. R. Popper and N. R. Campbell)', in M. L. Dalla Chiara et al. (eds.). Language, Quantum, Music, Kluwer: 73 - 82.

[57] Gibbon, E. (1776 - 1788) Decline and Fall of the Roman Empire, John Murray. 1862.

[58] Gillies, D. A. (1971) 'A Falsifying Rule for Probability Statements', British Journal for the Philosophy of Science, 22: 231 - 261.

[59] Gillies, D. A. (1972a) 'Operationalism', Synthese, 25: 1 - 24.

[60] Gillies, D. A. (1972b) 'The Subjective Theory of Probability', British Journal for the Philosophy of Science, 29: 138 - 57.

[61] Gillies, D. A. (1973) An Objective Theory of ProbabUity, Methuen.

[62] Gillies, D. A. (1982) Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic, Van Gorcum.

[63] Gillies, D. A. (1987) ' Was Bayes a Bayesian?', Historia Mathematica, 14: 325 - 346.

[64] Gillies, D. A. (1988a) 'Induction and Probability', in G. H. R. Parkinson (ed.). An Encyclopaedia of Philosophy, Chapter, 9, 179 - 204.

[65] Gillies, D. A. (1988b) 'Keynes as a Methodologist', British Journal for the Philosophy of Science, 39: 117 - 29.

[66] Gillies, D. A. (1990) 'Bayesianism versus Falsificationism. Review of Howson and Urbach 1989', Ratio New Series Ⅲ, (1): 82 - 98.

[67] Gillies, D. A. (1991) 'Intersubjective Probability and Confirmation Theory', British Journal for the Philosophy of Science, 42: 513 - 533.

[68] Gillies, D. A. (1996) Artificial Intelligence and Scientific Method, Oxford University Press.

[69] Gillies, D. A. and Ietto-Gillies, G. (1991) 'Intersubjective Probability and Economics', Review of Political Economy, 3 (4): 393 - 417.

[70] Gnedenko, B. V. (1950) The Theory of Probability, English translation, Chelsea, 1962.

[71] Hacking, I. (1965) Logic of Statistical Inference, Cambridge University Press, 1965.

[72] Hacking, I. (1975) The Emergence of Probability. A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference, Cambridge University Press, Paperback edition, 1984.

[73] Hicks, J. (1979) Causality in Economics, Blackwell.

[74] Hilbert, D. (1899) Foundations of Geometry, English translation, Open Court, 1971.

[75] Howson, C. and Urbach, P. (1989) Scientific Reasoning. The Bayesian Approach, Open Court.

[76] Humphreys, P. (1985) 'Why Propensities cannot be Probabilities', The Philosophical Review, 94: 557 - 570.

[77] Iversen, G. R., Longcor, W. H., Mosteller, F., Gilbert, J. P., and Youtz, C. (1971) 'Bias and Runs in Dice Throwing and Recording: a Few Million Throws', Psychometrika, 36

(I): 1 - 19.

[78] Jaynes, E. T. (1973) 'The Well-Posed Problem', Foundations of Physics, 4 (3): 477 - 492.

[79] Jeffreys, H. (1939) Theory of Probability, Oxford University Press.

[80] Kendall, M. G. and Babington-Smith, B. (1938) 'Randomness and Random Sampling Numbers', Journal of the Royal Statistical Society, 101: 147.

[81] Kendall, M. G. and Babington-Smith, B. (1939a) 'Randomness and Random Sampling Numbers', Journal of the Royal Statistical Society (Supplement), 6: 57.

[82] Kendall, M. G. and Babington-Smith, B. (1939b) Tables of Random Sampling Numbers, Cambridge University Press.

[83] Keynes, J. M. (1921) A Treatise on Probability, Macmillan, 1963.

[84] Keynes, J. M. (1936) The General Theory of Employment, Interest and Money. The Collected Writings of John Maynard Keynes, Vol. VII, *Macmillan, Cambridge University Press for the* Royal Economic Society, 1993.

[85] Keynes, J. M. (1938) 'My Early Beliefs', in The Collected Writings of John Maynard Keynes, Vol. X, Essays in Biography, Macmillan, Cambridge University Press for the Royal Economic Society, 1985.

[86] Kolmogorov, A. N. (1933) Foundations of the Theory of Probability, Second English Edition, Chelsea, 1956.

[87] Kuhn, T. S. (1962) The Structure of Scientific Revolutions, University of Chicago Press.

[88] Lad, F. (1983) 'The Construction of Probability Theory', Science and Society, 47: 285 - 299.

[89] Lad, F. (1996) Operational Subjective Statistical Methods, Wiley.

[90] Lakatos, I. (1968) 'Changes in the Problem of Inductive Logic', in Philosophical Papers, Vol. 2, Cambridge University Press, Paperback edition, 1983: 128 - 200.

[91] Laplace, P. S. (1814) A Philosophical Essay on Probabilities, *English Translation of the 6th* French Edition, Dover, 1951.

[92] Locke, J. (1690) An Essay concerning Human Understanding, Everyman Library, J. M. Dent and Sons, 1961.

[93] McCurdy, C. S. I. (1996) 'Humphreys's Paradox and the Interpretation of Inverse Conditional Propensities', Synthese, 108: 105 - 125.

[94] Mach, E. (1883) The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of its Development, 6th American Edition, Open Court, 1960.

[95] Melior, D. H. (1971) The Matter of Chance, Cambridge University Press.

[96] Miller, D. W. (1994) *Critical Rationalism. A Restatement and Defence*, Open Court.

[97] Miller, D. W. (1996) 'Propensities and Indeterminism', in A. O'Hear (ed.). Karl Popper: Philosophy and Problems, Cambridge University Press: 121 - 147.

[98] Milne, P. (1986) 'Can there be a Realist Single - Case Interpretation of Probability?', Erkenntnis, 25: 129 - 132.

[99] Monk, R. (1990) Ludwig Wittgenstein. The Duty of Genius, Jonathan Cape.

[100] Monk, R. (1996) Bertrand Russell. The Spirit of Solitude, Jonathan Cape.

[101] Newton, I. (1687) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Andrew Motte's English translation of 1729, revised by Florian Cajori, University of California Press, 1960.

[102] Paris, J. B. (1994) The Uncertain Reasoner's Companion. A Mathematical Perspective, Cambridge University Press.

[103] Pascal, B. (1670) Pensees, English translation, Penguin, 1972.

[104] Pearson, K. (1900) 'On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling', Reprinted in Karl Pearson's Early Statistical Papers, Cambridge University Press, 1956: 339 - 357.

[105] Peirce, C. S. (1910) 'Notes on the Doctrine of Chances', Reprinted in Essays in the Philosophy of Science, The American Heritage Series, Bobbs-Merrill, 1957: 74 - 84.

[106] Poincare, H. (1902) Science and Hypothesis, English translation, Dover, 1952.

[107] Popper, K. R. (1934) The Logic of Scientific Discovery, 6th revised impression of the 1959 English translation, Hutchinson, 1972.

[108] Popper, K. R. (1957a) 'Probability Magic or Knowledge out of Ignorance', Dialectica, 11 (3/4): 354 - 374.

[109] Popper, K. R. (1957b) 'The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability, and the Quantum Theory', in S. Körner (ed.). Observation and Interpretation, Proceedings of the Ninth Symposium of the Colston Research Society, University of Bristol: 65 - 70, 88 - 89.

[110] Popper, K. R. (1957c) 'The Aim of Science', Ratio, 1 (1): 24 - 35.

[111] Popper, K. R. (1959a) New Appendices to the Logic of Scientific Discovery, in 6th revised *impression of the* 1959 *English translation*, Hutchinson, 1972: 307 - 464.

[112] Popper, K. R. (1959b) 'The Propensity Interpretation of Probability', British Journal for the Philosophy of Science, 10: 25 - 42.

[113] Popper, K. R. (1963) Conjectures and Refutations, Routledge and Kegan Paul.

[114] Popper, K. R. (1983) Realism and the Aim of Science, Hutchinson.

[115] Popper, K. R. (1990) A Worm of Propensities, Thoemmes.

[116] Ramsey, F. E. (1926) 'Truth and Probability', in Ramsey, 1931: 156 - 198. Reprinted in H. E. Kyburg and H. E. Smokier (eds), Studies in Subjective Probability, Wiley, 1964, 61 - 92.

[117] Ramsey, F. E. (1928) 'Further Considerations', in Ramsey, 1931: 199 - 211.

[118] Ramsey, F. E. (1929) 'Last Papers. C. Probability and Partial Belief', in Ramsey, 1931: 256 - 257.

[119] Ramsey, F. E. (1931) The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, Routledge and Kegan Paul.

[120] Ramsey, F. E. (1991) Notes on Philosophy, Probability and Mathematics, Bibliopolis.

[121] Reichenbach, H. (1949) The Theory of Probability, University of Califomia Press.

[122] Richardson, S. (1740) Pamela; or Virtue Rewarded, Penguin Classics, 1985.

[123] Runde, J. (1994) 'Keynes After Ramsey: In Defence of A Treatise on Probability', Studies in History and Philosophy of Science, 25(1): 97-121.

[124] Runde, J. (1996) 'On Popper, Probabilities and Propensities', Review of Social Economy, LIV (4): 465-485.

[125] Russell, B. (1905) 'On Denoting', in R. C. Marsh (ed.). Bertrand Russell. Logic and Knowledge. Essays 1901-1950, Allen and Unwin, 1956: 41-56.

[126] Russell, B. (1912) The Problems of Philosophy, Williams and Norgate, n. d.

[127] Russell, B. (1914) Our Knowledge of the External WorM, Allen and Unwin, 1961.

[128] Russell, B. (1959) My Philosophical Development, Allen and Unwin, 1969.

[129] Russell, B. (1967) The Autobiography of Bertrand Russell, Vol. 1: 1872-1914, Allen and Unwin.

[130] Rutherford, D. E. (1951) Classical Mechanics, 2nd Edition, Oliver and Boyd, 1957.

[131] Ryder, J. M. (1981) 'Consequences of a Simple Extension of the Dutch Book Argument', British Journal for the Philosophy of Science, 32: 164-167.

[132] Sahlin, N. E. (1990) The Philosophy ofF. P. Ramsey, Cambridge University Press.

[133] Salmon, W. C. (1979) 'Propensities: a Discussion Review of D. H. Melior The Matter of Chance', Erkenntnis, 14: 183-216.

[134] Sambursky, S. (1954) The Physical World of the Greeks, English paperback edition, Routledge and Kegan Paul, 1963.

[135] Skidelsky, R. (1983) John MaynardKeynes. Vol. 1. Hopes Betrayed 1883-1920, Macmillan.

[136] Skidelsky, R. (1992) John Maynard Keynes. Vol. 2. The Economist as Saviour 1920-1937, Macmillan.

[137] Soros, G. (1987/94) The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market, 2nd Edition, 1994, John Wiley.

[138] Soros, G. (1992) Introduction to W. Newton-Smith and J. Tianji (eds.). Popper in China, Routledge.

[139] Student (Gosset, W. S.) (1908) 'The probable error of a mean', Biometrika, 6: 1-25.

[140] Sucar, L. E., Gillies, D. F., and Gillies, D. A. (1993) 'Objective Probabilities in Expert Systems', Artificial Intelligence, 61: 187-208.

[141] Todhunter, I. (1865) A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace, Chelsea, 1965.

[142] von Mises, R. (1919) 'Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung', Reprinted in Von Mises, 1964b: 57 - 106.

[143] von Mises, R. (1928) Probability, Statistics and Truth, 2nd revised English edition, Allen and Unwin, 1961.

[144] von Mises, R. (1938) 'Ernst Mach und die empiristische Wissenschaftsauffassung', Reprinted in Von Mises, 1964b: 495 - 523.

[145] von Mises, R. (1940) 'Scientific Conception of the World: On a New Textbook of Positivism', Reprinted in Von Mises, 1964b: 524 - 529.

[146] von Mises, R. (1964a) Mathematical Theory of Probability and Statistics, Academic Press.

[147] von Mises, R. (1964b) Selecta Ii, American Mathematical Society.

[148] Wald, A. (1937) 'Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivsbegriffes', Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8: 38 - 72.

[149] Wald, A. (1938) 'Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes', in Wald: Selected Papers in Statistics and Probability, MacGraw-Hill, 1955: 25 - 41.

[150] Williamson, J. O. D. (1999) 'Countable Additivity and Subjective Probability', British Journal for the Philosophy of Science, 50: 401 - 416.

[151] Wittgenstein, L. (1921) Tractatus Logico-Philosophicus, Routledge and Kegan Paul. 1963.

[152] Zabell, S. L. (1989) 'The Rule of Succession', Erkenntnis, 31: 283 - 321.